QUINTANA ROO
GOBIERNO DEL ESTADO
2016 • 2022

MÁS Y MEJORES OPORTUNIDADES

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE QUINTANA ROO

MATEMÁTICAS 1

Material Didáctico del Estudiante

I

SEMESTRE

Directorio

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

Mtra. Yolanda del Rosario Loría Marín
Directora Académica

Lic. Mario Velázquez George
Subdirector Académico

Mtra. Cindy Jazmín Cuellar Ortiz
Jefa del Departamento de Docencia y Apoyo Académico

Elaboración, revisión y aprobación:

Mtro. Juan Enrique Estrella Cetina, **Docente del Plantel Bacalar**
Mtra. Luvia Adriana de la Fuente Domínguez**, Docente del Plantel Chetumal Dos**
Mtra. Leticia María Ávila Peraza, **Docente del Plantel Isla Mujeres**
Mtra. Guadalupe del Carmen Uc Morales, **Docente del Plantel Señor**
Mtro. Jimmy Noé Kiau Flores, **Docente del Plantel Cancún Tres**
Ing. Jesús Antonio Díaz Velázquez**, Docente del Plantel Cancún Uno**
Ing. Ignacio de Jesús Poot Tec**, Docente del Plantel Maya Balam**
Ing. Tilo de Jesús Burelo Jerónimo**, Docente del Plantel Puerto Morelos**

Revisión y Actualización:

Mtra. Jessica Vianey Cortés Talamantes **Jefa de Materia del Área de Matemáticas**

Diseño de portada:
Lic. Juan Naim Góngora Piña, **Responsable del Área de Comunicación y Difusión**

Avenida Héroes #310 entre Justo Sierra y Bugambilias
Col. Adolfo López Mateos
Chetumal, C.P. 77010, Othón P. Blanco, Quintana Roo

PRESENTACIÓN

Estimada y estimado estudiante:

Me es grato darte la bienvenida al nuevo semestre que estás por iniciar. En la Dirección General del Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, estamos comprometidos con el desarrollo educativo que recibirás durante el bachillerato; por ello, el cuadernillo que ahora posees, es producto de un esfuerzo y trabajo conjuntos entre los docentes y los responsables de las áreas académicas de nuestras oficinas centrales.

Si bien es cierto la pandemia trajo consecuencias negativas, ello no representa un impedimento para no cumplir con nuestra labor educativa, razón esencial de nuestra gran institución. Por ello, hoy más que nunca, la labor académica es vital para alcanzar nuestro principal objetivo: tu formación escolar que contribuya a consolidar tu proyecto de vida.

El contenido de este *Material didáctico del estudiante*, te permitirá ejercitar los contenidos de tus diferentes programas de estudio. Por supuesto, estarás respaldado por la asesoría y seguimiento de cada uno de tus docentes y autoridades educativas. Cada una de las personas que laboramos en el Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo ponemos lo mejor de nosotros para seguir caminando juntos para generar resiliencia y fortalecer las competencias académicas y socioemocionales que nos permitan salir adelante.

Te invito a no bajar la guardia en lo académico y en el cuidado de tu salud. Trabaja intensamente, con compromiso y con responsabilidad; sé responsable y perseverante, ello te llevará al éxito y a cumplir tus metas. Te deseo lo mejor para este semestre que inicia.

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Nuestro compromiso es continuar generando estrategias que te permitan fortalecer los aprendizajes de las diversas asignaturas, por esta razón ponemos a tu disposición este documento, el cual se construyó con la participación de maestras y maestros del área de matemáticas de todo el estado, quienes con mucha dedicación y esfuerzo diseñaron actividades tomando en consideración los aprendizajes esperados y las competencias de los programas de estudio y que estamos seguros te permitirán continuar con tu formación académica.

Es importante mencionar que, este cuadernillo contiene una serie de actividades que te permitirán alcanzar los aprendizajes esperados de la asignatura de Matemáticas 1, en el curso propedéutico recuperaste algunos conocimientos previos sobre aritmética, álgebra y estadística que desarrollaste en tu educación básica, ahora es momento de consolidarlos en el bachillerato para comprender su importancia y relación con el contexto, así pues seguir desarrollando competencias a lo largo de tu vida estudiantil.

Esta asignatura se compone de 7 bloques para desarrollar el pensamiento lógico matemático. Cada actividad contiene una lectura previa que te permitirá comprender los contenidos principales, posteriormente encontrarás las instrucciones precisas para desarrollarla y la descripción del instrumento con la que será evaluada. Considera que, el orden los bloques puede variar ya que cada docente establecerá su planeación didáctica.

Se hace énfasis en que practiques el proceso de autoevaluación, de tal manera que puedas reflexionar sobre las dificultades a las que te enfrentaste y los aprendizajes que lograste al final de cada bloque, no olvides tomar nota en tu libreta de todo aquello que observaste en tu proceso de aprendizaje para que posteriormente puedas comentar con tu maestra o maestro.

También, considera dos herramientas básicas para el desarrollo de las actividades como lo son: tener a la mano un juego de geometría o cualquier objeto que te permita realizar trazos en tu libreta, así como recuperar la calculadora científica del semestre anterior para realizar algunos cálculos matemáticos implicados en las actividades.

Te recomendamos dedicar un horario determinado de estudio ya que las realizarás a través de la autogestión, encuentra un espacio en casa que te permita estar cómodo y con el menor número de distracciones, así como revisa las instrucciones de cada actividad para completarla con éxito.

Recuerda que las matemáticas son importantes en tu formación, pues promueven el razonamiento, al mismo tiempo desarrolla tu capacidad de análisis, tu pensamiento crítico, tomar decisiones informadas e imaginar soluciones posibles a problemas. Algunas actividades te pueden parecer fáciles, otras quizá más difíciles, pero no te desanimes, con un poco de esfuerzo y perseverancia estamos seguros que podrás concluirlas satisfactoriamente.

Finalmente, es necesario que te mantengas comunicado con tu maestro o maestra para establecer las fechas y los mecanismos de entrega, así como los criterios de evaluación, no te sientas solo, estamos para apoyarte y acompañarte en este camino.

¡Éxito!

BLOQUE I. Números y operaciones básicas

Actividad 1

- **Aprendizajes Esperados:** Resuelve y formula de manera colaborativa problemas aritméticos eligiendo críticamente una alternativa de solución que le permita afrontar retos en situaciones de su entorno.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** Números: Clasificación y propiedades de los números reales.

Reconociendo los números

Situación didáctica:

Comencemos jugando con los números realiza las operaciones indicadas en cada acertijo matemático:

a) Un caracol se encuentra en un pozo de 3 metros de profundidad e inicia el ascenso para salir de él de tal forma que durante el día sube 2 metros, pero durante la noche mientras descansa resbala 1 metro. ¿Cuántos días tardará el caracol en salir del pozo?

b) Con 4 cuatros en cada ocasión y utilizando algunas de las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división debes poder acomodarlos, de tal forma que se obtenga como resultado cada uno de los dígitos del 1 al 9.

c) Utilizando 8 ochos y algunos signos de suma forma cantidades, de tal forma que el resultado final al sumarse sea 1000.

Lectura previa

Seguramente en tu vida diaria escuchas, mencionas y manejas diferentes números, incluso sabes hacer operaciones básicas con ellos, pero, te has puesto a pensar en las siguientes cuestiones: ¿Todos los números han existido por siempre? ¿Todos se clasifican de la misma manera? ¿Todos tienen las mismas propiedades?

Comencemos haciendo un poco de historia: el ser humano al principio utilizó pequeñas marcas en los árboles o en las paredes de las cavernas para tratar de “contar” algunas cosas que le parecían periódicas como los días y las noches, o para tener noción de algo que era de su propiedad.

Posteriormente fueron apareciendo los símbolos que ahora conocemos como números, pero no todos al mismo tiempo.

Lee el siguiente texto: (tomado de la Guía Pedagógica, SEP)

> "En tiempos muy antiguos, el conteo se efectuaba mediante representaciones con pequeñas piedras. Es por esto por lo que, en la actualidad se usa la palabra cálculo, ya que dicha palabra proviene del latín *calculus*, que significa piedras. Debido a que la contabilidad se realizaba con objetos, los números expresan la medida de una magnitud o cantidad en relación con una unidad; los numerales son el símbolo con el que se representa a un número."

Clasificación de los números

La ciencia que se encarga del estudio de los números y sus operaciones es la *Aritmética,* que significa literalmente "arte de contar".

Recordemos la clasificación de los números que ya estudiaste en el curso propedéutico: los primeros números que se utilizaron fueron **los naturales** ya que estos asociaban un número por cada cantidad de objetos que se tienen, entonces los naturales van desde el 1 hasta el infinito ya que no podemos parar de contar y siempre habrá un número más grande. Cabe hacer mención, de que infinito no es un número, es una representación abstracta de algo que no tiene fin, su símbolo es: ∞ (ocho acostado).

Entonces representamos los números naturales de la siguiente forma:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Cuando hubo la necesidad de representar pérdidas o distancias en otra dirección que no fuese hacia los **números naturales**, aparecieron los **números negativos** quienes junto con el **cero** y **los naturales o positivos** conforman a los **números enteros**, los cuales son los que utilizamos desde pequeños, el 0 se considera la frontera entre positivos y negativos, a partir del cero colocamos los negativos hacia la izquierda comenzando desde -1, -2, -3, -4, - 5 etcétera hasta -∞ (- infinito) y mientras más a la izquierda esté un número de otro será el menor y también a partir del cero hacia la derecha colocamos los positivos hasta el infinito, se sigue el mismo principio mientras más a la izquierda está un número de otro entonces es el menor. Se representan de la siguiente forma:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots\}$$

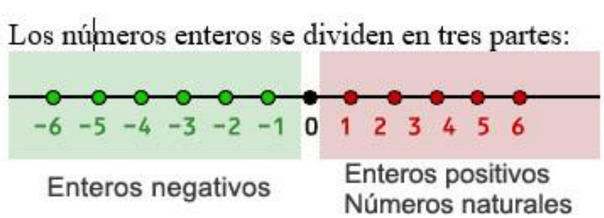


Imagen tomada de: https://matte23.blogspot.com/2016/09/numeros-enteros-y-su-uso.html

Después cuando se tuvo la necesidad de partir el entero o varios enteros aparecieron los **racionales o fraccionarios** y surge la nomenclatura del numerador y denominador. En un número racional el numerador es el que está arriba y representa a lo que se divide o las partes que se toman al partir, el de abajo representa la fracción en la que se parte.

$$Q=\left\{\frac{a}{b}/\,a\in Z,\ b\in Z,\ b\neq 0\right\}$$

Imagen tomada de: https://www.slideshare.net/hilderlino/conjunto-de-nmeros-racionales-38076837/11

La imagen representa al conjunto de los números racionales como la división o razón entre 2 números enteros y donde el denominador no puede ser cero.

Ahora bien, cuando colocamos en una recta numérica a los números enteros y a los racionales nos damos cuenta que aún quedan espacios que no son ocupados por algunos de estos números, entonces surge la noción de **números irracionales** que son aquellos números que no pueden ser expresados como fracciones, tienen infinitos dígitos decimales que no se repiten como por ejemplo la raíz cuadrada de 2, el número Pi, el número áureo, etc. de los cuales hablaremos un poco más adelante.

Los irracionales se representan de la siguiente forma:

$$I := R\setminus Q = \{x \in R \mid x \notin Q\}$$

Ejemplo: $\{\pi, e, \sqrt{3}, \sqrt{2}\}$

LIFEDER.COM

Imagen tomada de: https://www.lifeder.com/clasificacion-numeros-reales/

Estos 4 conjuntos unidos forman el conjunto completo de los números reales los cuales se representan de la siguiente forma:

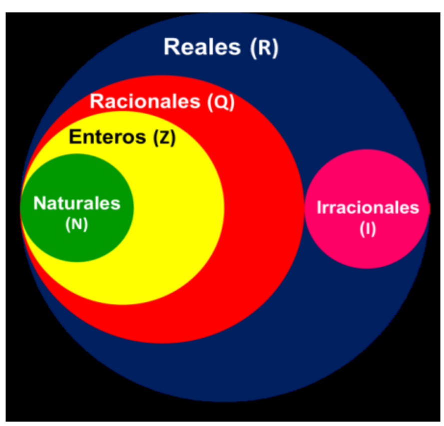


Imagen tomada de la Guía pedagógica extraordinaria de la SEP 2020-2021.

Entonces los **números reales** son todos los que conocemos y manejamos en nuestras actividades y operaciones básicas diarias.

Tipos de números

Ahora identifiquemos los números de acuerdo a características especiales ya que a lo largo de todas nuestras actividades matemáticas los estaremos mencionando.

- **Números pares e impares:** Un número par es aquél que es múltiplo de 2, se divide exactamente entre 2. El # 0 se le puede considerar par al estar entre dos impares.
  Un número impar es aquél que no es par.
  El consecutivo de cualquier número se obtiene sumando 1 al anterior, o sea, si tenemos un número n, su consecutivo es $n + 1$.

- **Números primos:** Un número es primo si sus únicos factores son el 1 y el mismo número, o sea solamente tiene división exacta entre uno y él mismo, si no es primo es *compuesto* o sea tiene división exacta entre otros números y se puede descomponer como un producto de factores primos. Por ejemplo: Los diez primeros números primos positivos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29; los diez primeros números compuestos positivos son 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 y 18, el 9 se descompone como el producto 3×3, el $10 = 2 \times 5$ y $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$.

Para reconocer si un número es primo resulta útil conocer los criterios de divisibilidad y así podemos descartarlo sin efectuar la división. Para determinar si un número entero se divide exactamente entre otro sin dejar residuos utilizamos los siguientes criterios:

- ENTRE 2: si el número termina en 0 o es par.
- ENTRE 3: si la suma de los dígitos del número es múltiplo de 3.
- ENTRE 4: si los dos últimos dígitos del número forman un múltiplo de 4 o termina en 00.
- ENTRE 5: si el número termina en cero o en 5.
- ENTRE 6: si cumple con los criterios de 2 y de 3 ambos a la vez.
- ENTRE 7: si el número formado sin el dígito de las unidades menos el doble de ese dígito es 0 o 7, siguiendo el procedimiento las veces necesarias.
- ENTRE 8: si los 3 últimos dígitos del número terminan en 0 o forman un número que sea múltiplo de 2 y de 4.
- ENTRE 9: si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
- ENTRE 10: si termina en cero.

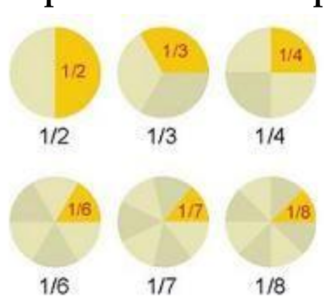
Ejemplo

El número 840 es divisible entre:

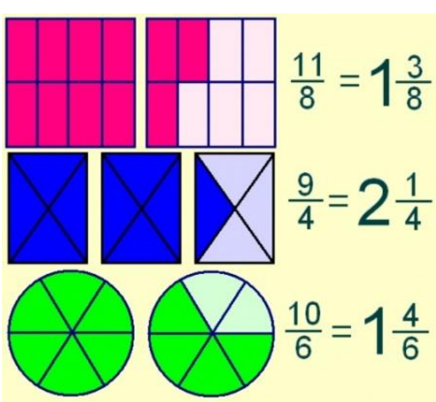
Número	Porque	Resultado
2	Es par	420
3	Sus dígitos suman 12	280
4	40 es múltiplo de 4	210
5	Termina en 0	168
6	Cumple con los criterios de 2 y 3	140
7	84 – 0 = 84 8 – 8 = 0	120
8	Es múltiplo de 2 y de 4	105
10	Termina en 0	84

- **Números racionales o fracciones:** Los números racionales son los que tienen numerador y denominador y al efectuar la división tienen un número exacto de decimales o decimales que se repiten indefinidamente. También tienen sus propios tipos los cuales son fracciones propias cuando el numerador es menor que el denominador e impropias cuando el numerador es mayor que el denominador, también están las fracciones aparentes y son aquellas donde la división es exacta.

Ejemplos de fracciones propias:



Supongamos que tenemos una pizza y la queremos partir para dividir entre varias personas, entonces $\frac{1}{2}$ se entiende como cortarla (el entero) en 2 partes, queda partida a la mitad (media pizza) o agarrar una parte de dos. Así sucesivamente, si la pizza se divide en partes más pequeñas.



Ejemplos de fracciones impropias:

La primera notación corresponde a fracciones puras ya que solamente tiene numerador y denominador y la segunda es una fracción mixta ya que tiene una parte entera y la otra fracción.

Imágenes tomada de https://definicion.de/numeros-racionales/

En el tercer ejemplo mostrado en la imagen observamos la fracción $\frac{10}{6}$ siendo esta fracción equivalente a otra la cual se obtiene *simplificando*, lo que significa dividir tanto el numerador como el denominador entre el mismo número. Aquí resulta de suma importancia conocer los criterios de divisibilidad para saber si una fracción puede ser simplificada. Entonces, dividiendo entre dos el numerador y el denominador: $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Conversión de fracciones a decimales y viceversa

Para obtener el equivalente decimal de una fracción simplemente se efectúa la división (con la calculadora) y puede ser que la división nos proporcione un número exacto de decimales o que tenga infinitos decimales que se repiten.

Por ejemplo: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{15}{4} = 3.75$, $\frac{177}{10} = 17.7$ son fracciones con decimales exactos.
$\frac{1}{3} = 0.3333333\ldots = 0.\overline{3}$, $\frac{90}{13} = 6.923076923076 \ldots = 6.\overline{923076}$ son fracciones con decimales periódicos y se le pone la rayita encima a los decimales para especificar que se repiten.

Para obtener el equivalente fraccionario de un número decimal seguimos los siguientes procedimientos rápidos:

I) Decimal finito, es cuando el número tiene una cantidad exacta de decimales entonces se escribe una fracción tomando en cuenta que el denominador sea una potencia de 10 dependiendo de los decimales que tenga el número, o sea, si son décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas se coloca la cantidad de ceros después del 1 según los decimales que se tengan, después se simplifica la fracción.

Ejemplo

13.84, se escribe la parte decimal como $\frac{84}{100}$, y se simplifica $\frac{84}{100} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$ finalmente se convierte la parte entera a la fracción encontrada o se escribe como fracción mixta: $13.84 = \frac{346}{25} = 13\,\frac{21}{25}$

23.415, se escribe la parte decimal como $\frac{415}{1000}$ y se simplifica $\frac{415}{1000} = \frac{83}{200}$

II) Decimal infinito periódico es cuando la parte decimal tiene infinitos dígitos que se repiten, entonces se forma una fracción donde el numerador es la resta del número como si fuese entero menos la parte entera y el denominador son tantos 9 como números periódicos haya.

Ejemplo

$$7.\overline{3} = \frac{73-7}{9} = \frac{66}{9} = \frac{22}{3}$$

$$6.\overline{923076} = \frac{6923076-6}{999999} = \frac{6923070}{999999} = \frac{2307690}{333333} = \frac{769230}{111111} = \frac{256410}{37037} = \frac{36630}{5291} = \frac{3330}{481} = \frac{90}{13}$$

La simplificación se obtuvo dividiendo entre primos: 3, 3, 3, 7, 11, 37

III) Decimal semiperiódico infinito es cuando hay uno o varios decimales que no se repiten antes de los que se repiten, entonces se forma una fracción donde el numerador es la resta del número como si fuese entero menos el número formado antes del periodo, el denominador será tantos 9 como números periódicos hay y tantos 0 como números hay antes del periodo.

Ejemplo

$1.5\overline{3} = \frac{153-15}{90} = \frac{138}{90} = \frac{69}{45} = \frac{23}{15}$ es la fracción.

$4.3\overline{8} = \frac{438-43}{90} = \frac{395}{90} = \frac{79}{18}$ es la fracción.

Ahora que ya conoces los números, sus propiedades y características estás en posibilidades de hacer algunas actividades con ellos.

Actividad 1.1

Instrucciones:

1. Realiza lo que se pide en cada caso**.**
2. **Material necesario:** Libreta, hojas blancas o cuadriculadas, regla, calculadora científica (puedes utilizar la del celular), lápiz, lapicero, goma de borrar.

1) En tu libreta o en hojas cuadriculadas traza una recta numérica y coloca un número de cada uno de los siguientes que tú pienses: dígito, natural, entero, fraccionario, irracional.

Además, coloca los siguientes: $\frac{29}{4}$, $-\frac{47}{3}$, $-\frac{96}{8}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt[3]{27}$, $-\sqrt{150}$, π (pi), $7\frac{8}{10}$, $\frac{117}{15}$, $\frac{13\pi}{2}$, $-e$(número de Euler).

2) Escribe los primeros 20 números naturales elevados al cuadrado $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ y así sucesivamente

3) Escribe los primeros 10 números fraccionarios con su equivalente decimal empezando desde $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{3} = 0.33333 = 0.\overline{3}$, $\frac{1}{4} = 0.25$ y así sucesivamente. Para obtener el equivalente decimal divide el numerador (arriba) entre el denominador (abajo)

4) Determina 10 números PRIMOS.

5) Calcula la fracción de los siguientes decimales: 0.625, 2.6, $5.\overline{6}$, $7.\overline{09}$, $1.08\overline{3}$.

Evaluación

- Esta actividad se evaluará con el instrumento de evaluación 1.1 Rúbrica Reconociendo a los números.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Argumenta procedimientos para resolver problemas aritméticos presentes en su contexto.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** Operaciones con los números reales. / Leyes de los signos. / Leyes de los exponentes. / Jerarquía de operaciones / Mínimo común múltiplo. / Máximo común divisor.

Todo lo que puedo hacer con números reales

Situación didáctica:

Todo en el universo sigue un orden, el movimiento de los planetas, la trayectoria y duración de los movimientos de rotación y traslación de la tierra, el movimiento de las mareas, las actividades que realizan los animales, los periodos de floración en las plantas y árboles la temporada en que nos entregan sus frutos. Todo a nuestro alrededor sigue una secuencia definida, a veces se rompe, pero se corrige y sigue la continuidad. Esto significa que nuestra naturaleza, nuestra esencia debe ser regida por principios básicos aparte de lo espiritual o metafísico también del orden lógico. Parte de este orden lógico nos lo proporcionan las matemáticas.

Para poder realizar operaciones o cuentas como les llamamos comúnmente en todo lo que hacemos en nuestra vida cotidiana necesitamos conocer los principios reglas y procedimientos que debemos seguir para obtener resultados satisfactorios. En todas las actividades de nuestro diario vivir están presentes los números, desde el momento en que nos levantamos y miramos el reloj para conocer la hora, nuestra mente ya está trabajando con números e inmediatamente hacemos la cuenta de cuánto tiempo tenemos al día para cumplir con nuestras responsabilidades; al momento de ir por el desayuno nuestra mente ya calculó la cantidad exacta de los alimentos que necesitamos consumir para estar sanos y fuertes; cuando vamos a asearnos sabemos la cantidad exacta de jabón, *shampoo*, pasta dental, cremas, desodorante, perfume, que vamos a utilizar. Y así a lo largo de todo el día, tal vez a veces sin darnos cuenta nuestra mente está trabajando como una supercomputadora haciendo las cuentas y diciéndonos qué tanto necesitamos de cada cosa, en qué orden los vamos a utilizar y qué es lo que sigue después de cada actividad realizada. Entonces para poder trabajar y hacer cuentas con los números reales necesitamos conocer sus principios y reglas para poder llegar a respuestas verdaderas.

Para comenzar elabora un horario personal de actividades diarias donde pongas la hora de inicio y término y describas lo que haces en ese periodo de tiempo.

Lectura previa

Las operaciones básicas que podemos hacer con los números reales son las de adición (suma), sustracción (resta), multiplicación, división, potenciación y radicación. Para ello seguimos ciertos postulados o principios que nos indican las reglas a seguir y el orden lógico de dichas operaciones que nos conduce a respuestas correctas, son los siguientes:

Propiedades

- **CERRADURA PARA ADICIÓN, SUSTRACCIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN:** Si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos dos números reales el resultado en cada caso también será un número real.

$$a, b \text{ son números reales}$$

$a+b$, $a-b$, $(a)(b)$, $\frac{a}{b}$, dan como resultado un número real. Recordemos siempre que la división entre CERO no existe, entonces en la división $b \neq 0$.

- **ASOCIATIVA PARA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN:** La forma en que agrupemos varios números que se suman o multiplican no afecta el resultado.

$$7+5+19=(7+5)+19=7+(5+19)=31$$
$$(7)(5)(19)=(7\times 5)19=7(5\times 19)=665$$

Para la resta y división sí importa el orden en que se agrupan, por lo tanto, no tienen la propiedad asociativa.

SUSTRACCIÓN:

$$(7-5)-19 \neq 7-(5-19)$$

En la primera resta el resultado es -17 y en la segunda es 21.

DIVISIÓN:

$$(7 \div 5) \div 19 \neq 7 \div (5 \div 19)$$

En la primera división el resultado es $\frac{7}{95}$ y en el segundo es $\frac{133}{5}$.

- **CONMUTATIVA PARA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN:** Conmutar significa cambiar el orden de los sumandos o de los factores y no afecta el resultado.

$$100+50=50+100=150$$
$$(100)(50)(50)(100)=5000$$

Para la sustracción y división sí importa el orden en el que se acomodan, por lo tanto, no tienen la propiedad conmutativa.

SUSTRACCIÓN:

$$100-50 \neq 50-100$$

En la primera resta el resultado es 50 positivo y en la segunda es 50 negativo.

DIVISIÓN:

$$100 \div 50 \neq 50 \div 100$$

En la primera división el resultado es 2 y en la segunda es $\frac{1}{2}$

- **ELEMENTO NEUTRO PARA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN:** Es el 1, ya que al multiplicar cualquier número real por 1 se obtiene el mismo número y al dividir cualquier número real entre 1 se obtiene el mismo número.

  ELEMENTO NEUTRO PARA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN: Es el cero, ya que al sumar o restar 0 a cualquier número real se obtiene el mismo número.

- **EL INVERSO ADITIVO** de un número es el mismo número, pero con el diferente signo de tal forma que al sumarlos el resultado es CERO.

$$15 + (-15) = 15 - 15 = 0$$
$$-15 + 15 = 0$$

  EL INVERSO MULTIPLICATIVO de un número es la fracción con 1 en el numerador y el mismo número en el denominador, de tal forma que al multiplicarlos el resultado es UNO.

$$(15)\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{15}{15} = 1$$

◉ Leyes de los signos para la multiplicación y división

Para recordar estas leyes identificamos al signo + como amigo y al signo – como enemigo, entonces las leyes quedan así:

Amigo de mi amigo es mi amigo. $(+)(+) = +$ $\qquad \frac{+}{+} = +$

Amigo de mi enemigo es mi enemigo. $(+)(-) = -$ $\qquad \frac{+}{-} = -$

Enemigo de mi amigo es mi enemigo. $(-)(+) = -$ $\qquad \frac{-}{+} = -$

Enemigo de mi enemigo es mi amigo. $(-)(-) = +$ $\qquad \frac{-}{-} = +$

Imagen tomada de http://eldilemadelosnumerosconsigno.blogspot.com/2012/07/iii.html

Ejemplo

$$(20)(5) = 100$$
$$(20)(-5) = -100$$
$$(-20)(5) = -100$$
$$(-20)(-5) = 100$$

Leyes de los signos para la suma y resta

En este caso identificamos el signo + como ahorro y el signo – como deuda.

- Signos iguales: se suman los números y permanece el signo. Ahorro y ahorro aumenta el ahorro, deuda y deuda aumenta la deuda.

- Signos diferentes: Se restan los números y permanece el signo del mayor. Mucho ahorro y poca deuda nos queda ahorro, mucha deuda y poco ahorro nos queda deuda.

Ejemplo

$$+20 + 5 = +25$$
$$-20 - 5 = -25$$
$$+20 - 5 = +15$$
$$-20 + 5 = -15$$

Solamente recordemos que el signo + no se especifica antes del número positivo.

◉ Leyes de los exponentes

La operación potenciación indica multiplicar un número llamado base por sí mismo la cantidad de veces que nos indica el exponente. Por ejemplo:

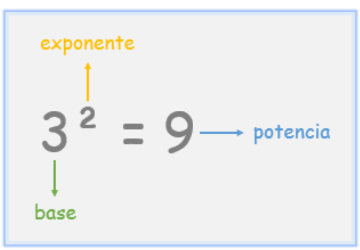


Imagen tomada de https://www.smartick.es/blog/matematicas/recursos-didacticos/signos-las-potencias/

Tanto la base como el exponente pueden ser cualquier número real y para hacer operaciones con potencias seguimos las siguientes reglas:

LEY	EXPLICACIÓN	NOTACIÓN	EJEMPLO
Exponente CERO	Cualquier base elevada al exponente CERO da uno.	$b^0 = 1$	$17^0 = 1$
Exponente UNO	Cualquier base elevada al exponente 1 da la misma base.	$b^1 = b$	$17^1 = 17$
Exponente NEGATIVO	Cualquier base elevada a un exponente negativo es igual al inverso o recíproco de la potencia con exponente positivo.	$b^{-e} = \frac{1}{b^e}$	$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
Multiplicación de potencias con la misma base	Es otra potencia con la misma base y la suma de los exponentes.	$(b^m)(b^n) = b^{m+n}$	$(10^2)(10^3) = 10^5 = 100{,}000$
División de potencias con la misma base	Se restan los exponentes pero pueden darse tres casos con los exponentes del numerador (EN) y el denominador (ED): CASO I) EN > ED. Exponente positivo. CASO II) EN = ED. Exponente 0. CASO III) EN < ED. Exponente negativo.	I) $\frac{b^m}{b^n} = b^{+(m-n)}$ II) $\frac{b^m}{b^m} = b^{m-m} = b^0 = 1$ III) $\frac{b^m}{b^n} = b^{-(n-m)}$	I) $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ II) $\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0 = 1$ III) $\frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
Potencia a otra potencia	Es otra potencia con la misma base y el producto de los exponentes.	$(b^m)^n = b^{mn}$	$(2^2)^3 = 2^6 = 64$
Potencia de un producto	Cada factor es una potencia con el mismo exponente.	$(ab)^m = a^m b^m$	$[(2)(3)]^2 = (2^2)(3^2) = (4)(9) = 36$
Potencia de una División o fracción	El numerador y el denominador son potencias con el mismo exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
Potencia con exponente fraccionario	El numerador es un exponente para la base y el denominador una raíz.	$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

◉ Jerarquía de operaciones:

Cuando en una expresión numérica tenemos que realizar varias operaciones de multiplicación, división, suma, resta, potenciación y radicación y si además éstas se encuentran agrupadas con los diferentes signos de agrupación como son los paréntesis (), los corchetes [] y las llaves {}, entonces primero se deben realizar las operaciones que están más encerradas entre los símbolos de agrupación, o sea las del signo de agrupación que está encerrado en otro, después se calculan las potencias o raíces de la expresión, seguimos con las multiplicaciones y divisiones y por último, se resuelven las sumas y restas que son las únicas que deben haber quedado.

Ejemplos

1) $2+\ 6^2-\frac{12}{2}\ \times\ 5+\sqrt{9}=\ 2+36-30+3=11$

2) $6\left(4+\ \sqrt{16}\right)-3+(3-2\ \cdot\ 8)-4=6(4+4)-3+(3-16)-4=6(8)-3+(-13)-4=48-3-13-4=28$

3) $\left[\frac{20-(4)\,(-2)}{7}\right]+\ (-15+6\ )=\left[\frac{20-(-8)}{7}\right]+(-9)=4-9=-5$

4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}\div\frac{10}{3}=\frac{5}{4}\div\frac{10}{3}=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}=0.375$

5) $(5-3)^2-\ [(2)^3-\ (2\times 5-18\ \div 3)]=4-[8-(10-6)]=4-[8-4]=4-4=0$

Mínimo Común Múltiplo:

El mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números es el menor número que es dividido exactamente por todos y cada uno de ellos. El mcm contiene el mayor número de todos los factores primos que aparecen en cada uno de los números dados. El procedimiento para calcularlo es el siguiente: escribimos los números uno después de otro, a su derecha colocamos una línea vertical, después de la línea ponemos el número que es divisor de alguno, aunque sea uno de ellos, procedemos a hacer las divisiones, el número que no es divisible exactamente se vuelve a poner, después buscamos otro divisor de alguno de ellos y volvemos a hacer las divisiones, así sucesivamente hasta obtener puras unidades. Al final el mínimo común múltiplo es el producto de todos los divisores o factores primos.

Ejemplos

Calcular el mínimo común múltiplo de **12, 45, 60**

12	45	60	2
6	45	30	2
3	45	15	3
1	15	5	3
1	5	5	5
1	1	1	

El mínimo común múltiplo es (2) (2) (3) (3) (5) = 180, es el menor número que puede dividirse exactamente entre 12, entre 45 y entre 60.

Máximo Común Divisor

El máximo común divisor (MCD)de dos o más números es el mayor número que es divisor de todos y cada uno de ellos, contiene a los factores comunes de los números. El procedimiento para calcular el máximo común divisor es el siguiente: escribimos los números uno después de otro, a su derecha colocamos una línea vertical, después de la línea ponemos el número que es divisor de todos los números, efectuamos las divisiones, después buscamos otro divisor y volvemos a hacer las divisiones, y así sucesivamente. Al final, el máximo común divisor es el producto de todos los divisores o factores primos comunes.

Ejemplo

Calcular el máximo común divisor de **12, 45, 60**

12	45	60	
4	15	20	3

Al no haber más divisores para los tres números concluimos que el máximo común divisor es 3.

Operaciones con fracciones

SUMA Y RESTA: Al sumar o restar varias fracciones se obtiene una sola fracción, se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores el cual será el denominador del resultado, después se divide entre cada uno de los denominadores y se multiplica por el numerador correspondiente poniendo los resultados en el numerador del resultado, luego se efectúan las sumas o restas.

También se puede hacer en parejas de fracciones multiplicando cruzado y escribiendo los resultados en el numerador, el producto de los denominadores es el denominador del resultado. Así se obtiene una nueva fracción que se suma o resta con la siguiente llevando a cabo el mismo procedimiento.

Ejemplo

$$\frac{2}{3}+\frac{12}{5}-\frac{7}{6}=\frac{20+72-35}{30}=\frac{57}{30}=\frac{19}{10}=1\,\frac{9}{10}$$

Segundo método:

$$\frac{2}{3}+\frac{12}{5}=\frac{10+36}{15}=\frac{46}{15}$$

$$\frac{46}{15}-\frac{7}{6}=\frac{276-105}{90}=\frac{171}{90}=\frac{57}{30}=\frac{19}{10}=1\,\frac{9}{10}$$

MULTIPLICACIÓN: Se multiplica en línea recta horizontal, numerador con numerador y denominador con denominador.

Ejemplos

a) La mitad de las dos terceras partes: $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

b) Cinco veces la tercera parte de siete medios:

$$(5)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{35}{6}$$

DIVISIÓN: Si colocamos las fracciones de manera lineal multiplicamos con productos cruzados, si colocamos como fracciones utilizamos la regla del sándwich o la torta, los extremos de arriba y abajo son los panes y las partes medias son jamón y queso, son las que se multiplican entre sí.

Ejemplos

a) Dos quintas partes entre un medio:

$$\frac{2}{5}\div\frac{1}{2}=\frac{4}{5} \qquad \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

b) Un medio entre un octavo:

$$\frac{1}{2}\div\frac{1}{8}=\frac{8}{2}=4 \qquad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=\frac{8}{2}=4$$

Ejemplos

Operaciones combinadas:

1) $\frac{26}{2}-\frac{9}{3}+\frac{15}{5}+\frac{4}{3}\times\frac{15}{8}=13-3+3+\frac{60}{24}=15\frac{1}{2}=\frac{31}{2}=15.5$

Simplificando $\frac{60}{24}$: $\frac{60}{24}=\frac{30}{12}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}=2.5$

2) $\frac{7}{4}+\frac{2}{49}-\frac{2}{5}\times\frac{10}{3}=\frac{351}{196}-\frac{20}{15}=\frac{1345}{2940}=\frac{269}{588}$

Actividad 1.2

Instrucciones

1. Ahora que ya aprendiste a hacer operaciones con los números reales es momento de poner en práctica estos conocimientos, habilidades y destrezas para resolver diversos problemas de tu entorno. Realiza lo que se te pide en cada caso.
2. Material necesario: Libreta, hojas blancas o cuadriculadas, regla, calculadora científica (puedes utilizar la del celular), lápiz, lapicero, goma de borrar.

I. Supongamos que junto con tus compañeras y compañeros van a preparar una ensalada de frutas para el desayuno y disponen de las siguientes:

FRUTA	CANTIDAD	PESO (Kg)	FRACCIÓN POR PORCIÓN	GRAMOS POR PORCIÓN
Sandía	1/2	1.5		
Papaya	1	1.2		
Manzana	12	1.440		
Plátano	9	0.9		
Uva	180	1.620		

Se requiere preparar 30 porciones, entonces vas a decidir cómo cortar y repartir en cada porción para que a todos les toque la misma cantidad de cada fruta. En la cuarta columna vas a calcular la fracción de fruta con respecto a una pieza que le está tocando a cada compañero, es decir si se trata de 2 piezas, 2 piñas, por ejemplo, entonces le está tocando $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ de piña a cada uno.

En la última columna escribirás los gramos de cada fruta que se reparte en cada porción y calcularás el total de gramos de la Porción.

Según la página web FATSECRET MÉXICO, una porción de 100 gramos de ensalada de frutas aporta 57 calorías, 1.27 g de proteínas, 20.46 gramos de azúcar y 1.63 g de grasas. Imagina que una persona consume una bolsa de papas fritas de Sabritas de 42 gramos y una coca cola de lata de 355 mililitros. Revisa en los empaques la cantidad en gramos que se está consumiendo de calorías, proteínas, azúcar y grasas y calcula en cuánto supera a una porción de fruta picada. Escribe tus conclusiones.


Base de datos de alimento y contador de calorías

100 G

Ensalada de Frutas

Info. Nutricional

Tamaño de la Porción	100 g
	Por porción
Energía	237 kj 57 kcal
Proteína	0,67g
Carbohidratos	13,16g
Fibra	1,8g
Azúcar	10,77g
Grasa	0,86g
Grasa Saturada	0,647g
Grasa Poliinsaturada	0,044g
Grasa Monoinsaturada	0,053g
Colesterol	0mg
Sodio	6mg
Potasio	141mg

Última actualización: 11 may. 20 10:35

Origen: FatSecret Platform API

Imagen tomada de: https://www.fatsecret.com.mx/calor%C3%ADas-nutrici%C3%B3n/gen%C3%A9rico/ensalada-de-frutas?portionid=4750290&portionamount=100,000

II. Resuelve los siguientes problemas escribiendo todos los procedimientos:

a) La temperatura de una ciudad era de 6° arriba de cero a las 2 de la mañana. Si la temperatura estuvo bajando 2° cada hora. ¿Qué temperatura había a las 6:30 de la mañana?

b) Tres aviones salen del aeropuerto de una ciudad para ir a otras diferentes. El primero sale cada 8 días, el segundo cada 10 y el tercero cada 20. Si el 2 de marzo coincidió en que salieran juntos de dicha ciudad. ¿En qué fecha volverán a coincidir sus salidas del mismo aeropuerto?

Evaluación

- Esta actividad se evaluará con el instrumento lista de cotejo 1.2. Todo lo que puedo hacer con los números reales.

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

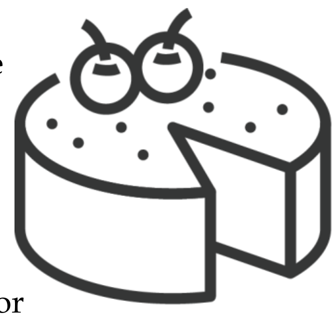
BLOQUE II. Razones y proporciones

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas de razones y proporciones en situaciones cotidianas que requieren una toma de decisiones consciente e informada.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Razón / Proporción / Porcentajes.

Lectura previa

En este apartado aprenderás uno de los temas más aplicables de las matemáticas: "Las razones y las proporciones"



Apuesto que alguna vez has querido cocinar un pastel o algo que se te ha antojado por verlo en una revista o en la web. No hay mucha dificultad en esto si consigues la receta y la sigues al pie de la letra. Sin embargo, un problema común es ver que la receta dice "para cuatro porciones" y tu intención era cocinar ese pastel, pero para 6 o 10 personas. ¿Cómo resolver este enorme problema? Si pones mucha atención a este apartado, podrás resolver éste y muchos otros sin mayor problema. Así que ¡mucho ánimo!

Primeramente, definamos el concepto de "Razón"

Razón

Es la relación entre dos números naturales diferentes de cero para expresar cuánto de una está contenida en la otra. La notación empleada para expresar esta relación a *a:b* que se lee, *a es a b.*

Analicemos el siguiente ejemplo[1]:

Si en un salón de clase hay 36 mujeres y 24 varones, la razón de mujeres a hombres es de 36 a 24; es decir, 36:24. En realidad lo que tratamos de saber es cuántas mujeres hay en el salón por cada varón. La razón la expresamos en modo fraccionario.

$$\frac{36}{24} = \frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, en el salón hay 3 mujeres por cada 2 varones. Y la razón es $\frac{3}{2}$ o 3:2

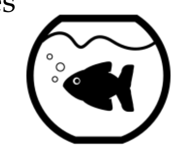
Las razones se pueden usar para expresar relaciones diversas entre dos cantidades, por ejemplo, la cantidad de personas enfermas que hay en un país en relación al número de

[1] (Basto, 2016)

personas que no lo están; o el valor del dólar respecto al valor del peso mexicano u otra moneda.

Ejemplo 1

Cuál es la razón de hembras y machos en una pecera que tiene 80 peces de los cuales 30 son hembras.



Solución:

Tenemos en total 80 peces. Si 30 son hembras, por diferencia obtenemos la cantidad de peces macho, esto es: 80 – 30 = 50. Por lo tanto, para expresar la razón que buscamos escribimos lo siguiente: 30:50 o lo que es lo mismo, $\frac{30}{50}$ simplificando tenemos: $\frac{30}{50}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

Por lo tanto, la razón es $\frac{3}{5}$ lo que quiere decir que por cada 3 hembras hay 5 machos en la pecera.

Ejemplo 2

En una caja tenemos 70 canicas azules y 25 canicas rojas. ¿Cuántas canicas azules hay en la caja por cada canica roja?

Solución:
La razón de canicas azules a rojas viene dada por la expresión 70:25 o lo que es lo mismo, $\frac{70}{25}$
Simplificando nos queda: $\frac{70}{25}=\frac{14}{5}$

La expresión anterior no es posible simplificarla más, por lo que la respuesta sería que por cada 5 canicas rojas hay 14 azules. Esta afirmación, aunque cierta, no responde a la pregunta del ejercicio. Lo que queremos saber es cuántas canicas azules hay por cada canica roja.
Para obtener esa información tendríamos que dividir tanto el numerador como el denominador entre 5 tal y como sigue:

$$\frac{14}{5}=\frac{14\div 5}{5\div 5}=\frac{2.8}{1}$$

Entonces podríamos decir que, por cada canica roja, hay 2.8 canicas azules. Sin embargo, esta expresión, aunque verdadera es incorrecta por definición; además de que, en la práctica, puede resultar algo complicado tener 2.8 canicas. Por lo tanto, la razón debe expresarse siempre con números enteros. Concluyendo, la respuesta correcta y verdadera sería que hay 14 canicas azules por cada 5 rojas.

Por otro lado, tenemos el concepto de proporción[2]:

[2] (Méndez, 2015)

Proporción

A la igualdad de dos razones se le denomina *proporción.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

En una proporción el producto del numerador de la primera razón por el denominador de la segunda razón es igual al producto del denominador de la primera razón por el numerador de la segunda. Esto es:

$$ad = bc$$

Ejemplo 3

En una farmacia se venden medicamentos de patente y genéricos. Puesto que los medicamentos genéricos son más baratos, en este mes se registró que por cada medicamento de patente se vendieron 4 genéricos. ¿Si se vendieron 80 medicamentos de patente, cuántos genéricos se vendieron?

Solución:
Escribimos la razón de medicamentos de patente a genéricos quedando como sigue:

$$\frac{1}{4}$$

Por cada 4 genéricos se vende uno de patente. Se venden 80 de patente, entonces, como debe permanecer la misma razón, se tendría la siguiente expresión:

$$\frac{1}{4} = \frac{80}{x}$$

Donde x representa el número de medicamentos genéricos. Despejando queda:

$$x = \frac{4(80)}{1} = 320$$

Se vendieron 320 medicamentos genéricos.

Ejemplo 4[2]

En un salón hay 36 mujeres y 24 hombres, ¿cuántas mujeres debe haber en otro salón que tiene 18 hombres para que los grupos sean proporcionales.

Solución:
Razón de mujeres a hombres en el salón 1 es 36:24. Para mantener la misma proporción en ambos salones, las dos razones deben ser iguales, por lo tanto:

$$\frac{36}{24} = \frac{x}{18}$$

Por definición podemos escribir la siguiente igualdad: 36(18) = 24x. eliminando los paréntesis y despejando x

$$x = \frac{648}{24}$$

$$x = 27$$

Debe haber 27 mujeres en el salón 2 para mantener la misma proporción.

Cuando en una proporción una de las razones tiene como segundo elemento al número 100, la proporción se denomina ***porcentaje***[3]. Por ejemplo, las rebajas en las tiendas se expresan en porcentajes, los impuestos se calculan como porcentajes del salario, lo que cobra un banco por usar una tarjeta de crédito, la información de los medios de comunicación generalmente expresa porcentajes, como el porcentaje de fumadores en una ciudad o el porcentaje de desempleo, etcétera. La expresión de cálculo de un porcentaje es a : b : c : 100, o en forma de fracciones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{100}$$

Ejemplo 5

¿Cuál es el 15% de 600?

Solución:

Se escribe en forma de fracción 15% quedando como sigue: $\frac{15}{100}$

La razón que debe ser igual a la anterior viene dada por: $\frac{x}{600}$

Y como ambas razones deben ser iguales, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{15}{100} = \frac{x}{600}$$

De donde se despeja la incógnita quedando de la siguiente manera:

$$15(600) = 100x$$

$$x = \frac{15(600)}{100}$$

$$x = 90$$

Si la expresión 15% la vemos como fracción y realizamos la división para obtener el resultado en decimales tal y como sigue a continuación, obtendríamos:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$$

Encontrar el 15% de 600 sería simplemente multiplicar: $600(0.15) = 90$

[3] (Méndez, 2015)

Ejemplo 6

Una bicicleta tiene un precio de venta de \$2,300. Si le hacen un descuento del 10% ¿cuál será el nuevo valor de la bicicleta?

Solución:
Se calcula el 10% de 2,300 con la siguiente expresión:

$$0.10(2{,}300) = 230$$

230 será el descuento que se hará del precio de venta; entonces:

$$2300 - 230 = 2{,}070$$

La bicicleta costará \$2,070 luego del descuento.

Actividad 2.1

Instrucciones

1. Copia los siguientes ejercicios en tu libreta y resuélvelos correctamente.
2. Resalta las respuestas con un marcador

Ejercicios

I. Un estudio demuestra que, por cada 10 personas, 3 prefieren Facebook que Instagram. ¿Cuál es la razón en ese estudio?

II. En un restaurante hay 12 mesas para no fumadores y 4 mesas para fumadores. ¿Cuántas mesas para fumadores deben colocarse en una sucursal de dicho restaurante en el que se colocaron 42 mesas para no fumadores si se desea que las cantidades sean proporcionales?

III. La imagen del rostro de una persona en una fotografía mide 2 cm de altura por 1.5 cm de anchura. Si el rostro de la persona real tiene 12 cm de altura, ¿cuál es su anchura?

IV. Las medidas de un campo de fútbol son 64m x 100m. Se quiere construir una cancha en el patio de una escuela, pero que sea proporcional a las medidas del campo de fútbol. Si se dispone 40m para el largo de la cancha, ¿cuánto debería ser el ancho?

V. Para cocinar un pastel que rinda 4 porciones necesitas 150g de harina. ¿Qué cantidad de harina será necesaria para un pastel de 10 porciones?

VI. Si el porcentaje de sal en una solución de laboratorio es 35% y el peso total de la solución es de 275 gr, ¿cuál es el peso de la sal pura en la solución?

VII. “Chicharito” Hernández tiene un promedio de 0.66 goles por partido. ¿Cuántos goles se espera que meta si en total juega 18 partidos?

Evaluación

- Se utilizará el instrumento de evaluación 2.1

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas de razones y proporciones en situaciones cotidianas que requieren una toma de decisiones consciente e informada.
- **Atributo (s):** 1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. / 5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- **Conocimiento (s):** Variación directa e inversa.

Lectura previa

Hemos visto hasta ahora los conceptos de razón y proporción en los que se relacionan dos cantidades. La **variación directa** es aquella que existe en una razón de tal manera que al aumentar o disminuir una de las cantidades, la otra aumenta o disminuye respectivamente. Por ejemplo, la relación que existe entre la cantidad de dulces que compras y el dinero que tienes que pagar por ellos; a mayor cantidad de dulces, mayor será el costo.

Algunos de los ejemplos visto anteriormente en este bloque corresponden a variación directa. Veamos nuevamente el ejemplo 3

"En una farmacia se venden medicamentos de patente y genéricos. Puesto que los medicamentos genéricos son más baratos, en este mes se registró que por cada medicamento de patente se vendieron 4 genéricos. ¿Si se vendieron 80 medicamentos de patente, cuántos genéricos se vendieron?"

Puede apreciarse que se trata de una variación directa ya que, si la cantidad de medicamentos aumenta, sucede lo mismo con la cantidad de medicamentos genéricos.

La proporción en ambos casos queda así: $\frac{4}{1} = \frac{320}{80}$

Nota: Observa que, en esta ocasión, la razón entre ambos medicamentos se expresó como $\frac{4}{1}$ a diferencia de $\frac{1}{4}$ que fue descrita anteriormente. Ambas razones son correctas. Lo importante es expresar la segunda razón equivalente en el mismo orden (numerador-denominador) para que la proporcionalidad no se pierda. Es decir, el 4 corresponde a medicamentos genéricos y es el numerador; el 320 debe corresponder a medicamentos genéricos y también debe ser el numerador en la segunda razón.

Ejemplo 1

Para administrar un medicamento se debe considerar el peso del paciente para indicar la dosis (a mayor peso, mayor dosis). Si se requieren 10 mg de este medicamento para un paciente de 50 kg de peso, ¿cuántos mg se requerirán para un paciente de 75 kg de peso?

Solución:
Vemos que es una variación directa ya que el enunciado "a mayor peso, mayor dosis" lo establece.

La razón dosis-paciente viene dada por: $\frac{10}{50}$

La proporción será la siguiente: $\frac{10}{50} = \frac{x}{75}$

Donde x representa la dosis en mg que se requieren.
Como es variación directa entonces:

$$75(10) = 50x$$

$$x = \frac{75(10)}{50}$$

$$x = 15$$

Se requieren 15mg del medicamento.

La **variación inversa** es aquella que existe en una razón de tal manera que al aumentar una de las cantidades, la otra disminuye y viceversa. Por ejemplo, la velocidad en la que vas en tu bicicleta y el tiempo que tardas en llegar a tu destino; a mayor velocidad, menor tiempo.

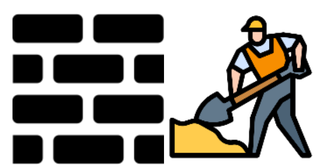
Sean las siguientes dos razones una variación inversa: $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$

Entonces: $ac = bd$

O lo que es lo mismo: $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

Ejemplo 2

Si tres obreros pueden construir una barda en 4 días, ¿cuánto tiempo les llevará a cinco obreros construir la misma barda?



Solución:
Observamos que se trata de una variación inversa porque a mayor número de obreros, menos tiempo de construcción.

La razón obreros-tiempo viene dada por $\frac{3}{4}$

La razón obreros-tiempo con 5 obreros es: $\frac{5}{x}$

Donde x es el tiempo que tardarán los 5 obreros.
Por lo tanto, para mantener la igualdad la expresión será: $\frac{3}{4} = \frac{x}{5}$
De donde se tiene que:

$$3(5) = 4x$$

$$x = \frac{3(5)}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Y como $\frac{3}{4}$ de día = 18hrs Con 5 obreros tardarán 3 días y 18 horas para terminar la barda.

Actividad 2.2

Instrucciones

1. Copia los siguientes ejercicios en tu libreta y resuélvelos correctamente.
2. Resalta las respuestas con un marcador.

I. Si se necesitan 8 horas para llenar una alberca de 1200 litros, ¿cuánto tiempo tardará llenar una alberca de 2500 litros?

II. Dos jardineros podan un jardín en 7 horas. Suponiendo que la velocidad para podar es la misma para los jardineros, ¿cuánto tiempo le llevará a uno solo realizar el trabajo?

III. Con 20 pesos se pueden comprar 3 chocolates. ¿Cuánto costarán 10 chocolates?

IV. Si 22 patos tienen comida para 10 días. Si tenemos 5 patos, ¿cuántos días tendrán comida? [4]

V. Si para envasar cierta cantidad de aceite se necesitan 8 barriles de 20 litros de capacidad cada uno, ¿cuántos barriles necesitaremos si los que tenemos son de 5 litros de capacidad? [5]

VI. Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos dijeron que 5 centímetros del mapa representaban 600 metros de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 8 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este parque? [6]

VII. Se compra cierta cantidad de chocolates para repartir a los invitados que asistan a una fiesta. La tabla muestra el número de chocolates que se repartirá a cada invitado de acuerdo con el número de personas que asistan.[7]

Número de asistentes a la fiesta	24	6	12	16
Cantidad de chocolates repartida a cada asistente a la fiesta	2	8		3

¿Cuál es la cantidad de chocolates que falta en la tabla?

a) 4 b) 9 c) 14 d) 16

[4] (Yo soy tu profe, s.f.)

[5] (Yo soy tu profe, s.f.)
[6] (Smartick, s.f.)
[7] (SEP,2017)

VIII. En una panadería la elaboración de galletas depende de la cantidad de harina que se usa, ¿qué opción muestra la tabla con una relación proporcional entre los kilogramos de galletas elaboradas y la cantidad de harina para hacerlas. [7]

A)

Galletas elaboradas (kg)	Cantidad de harina necesaria (kg)
3	1.05
7	2.45
9	3.85
11	5.25

B)

Galletas elaboradas (kg)	Cantidad de harina necesaria (kg)
3	1.05
7	2.45
9	3.15
11	3.85

C)

Galletas elaboradas (kg)	Cantidad de harina necesaria (kg)
3	1.05
7	2.25
9	2.85
11	3.45

D)

Galletas elaboradas (kg)	Cantidad de harina necesaria (kg)
3	1.05
7	2.10
9	3.15
11	4.20

Evaluación

- Se utilizará el instrumento de evaluación 2.1

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE III. Operaciones algebraicas

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones / Propone procesos de solución identificando posibles errores / Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.
- **Atributos:** 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento:** Lenguaje algebraico.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Lenguaje Algebraico

"El hombre que calculaba" es un libro de historias fascinantes que contiene acertijos matemáticos, fue escrito por el profesor brasileño Malba Tahan. La historia cuenta de Beremiz, un calculador de Bagdad, que viajaba por el Medio Oriente y se hizo famoso por su extraordinaria habilidad para resolver diferentes situaciones problemáticas con razonamientos lógico-matemáticos.

A continuación, lee con atención un pequeño fragmento:

> «Somos hermanos —dijo el más viejo— y recibimos, como herencia, esos 35 camellos. Según la expresa voluntad de nuestro padre, debo yo recibir la mitad, mi hermano Hamed Namir una tercera parte, y Harim, el más joven, una novena parte. No sabemos, sin embargo, como dividir de esa manera 35 camellos, y a cada división que uno propone protestan los otros dos, pues la mitad de 35 es 17 y medio. ¿Cómo hallar la tercera parte y la novena parte de 35, si tampoco son exactas las divisiones?».

¿Qué hizo Beremiz para resolverlo repartiendo los camellos exactamente como establecía el testamento del padre de los hombres? ¿Qué propondrías tú para encontrar una solución? Una estrategia que tal vez estás pensando basado en lo que aprendiste en la secundaria es que los problemas sobre contar y en los que existen cantidades desconocidas se pueden simbolizar usando letras, números y signos de operación,

La mitad de los camellos… $\frac{1}{2}x$ La tercera parte… $\frac{1}{3}x$

La novena parte… $\frac{1}{9}x$

a este tipo de expresiones se les conoce como lenguaje algebraico.

Cada día es más común usar en nuestra vida diaria frases como “x número” o “x objeto” cuando nos referimos a una cantidad desconocida o a un objeto que no está completamente identificado, pero más allá de usarlo para referirnos a una incógnita, traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico es una habilidad que debemos desarrollar porque es muy útil para resolver problemas y te será indispensable para lograr los aprendizajes de los siguientes bloques sobre ecuaciones.

Te invitamos a investigar, leer el final de esta historia y conocer la brillante e inesperada estrategia del hombre que calculaba.

Actividad 3.1

Instrucciones

1. Lee la siguiente información sobre el lenguaje algebraico y observa los ejemplos, pon principal atención en identificar las palabras claves para después realizar los ejercicios.
2. Escribe en tu libreta los ejercicios y resuelve. En el encabezado deberá llevar el título de la actividad, el número de bloque, la fecha, tu nombre completo, grado y grupo.

El álgebra es la rama de las Matemáticas que estudia a los números reales en forma generalizada y la forma de resolver las ecuaciones. Una de las características del álgebra es que utiliza símbolos para representar números.

El término álgebra viene del título de la obra del matemático árabe *Mahommed ibn Musa al-Kharizmi*, que significa transposición y eliminación.

El lenguaje algebraico es la forma de expresarse en álgebra, es la transformación del lenguaje cotidiano de los problemas a los símbolos matemáticos.

Terminología y notación
Expresión algebraica: es una combinación de números, letras (que representan números) y operaciones.
Por ejemplo: $5x^2 + 3x^3y^3z$.

En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de las frases más comunes y su traducción al lenguaje algebraico.

Tabla. Ejemplos de frases comunes y su traducción al lenguaje algebraico

Lenguaje Común	Lenguaje Algebraico
Un número cualquiera	x (es la más usada, pero puede elegirse cualquier letra del abecedario)
La suma de dos números cualquiera	x + y
La diferencia de dos números	a – b
El doble de un número, o un número par	2x
El triple de un número o 3 veces un número, el cuádruplo de un número o cuatro veces un número, etc.	3x, 4x, …
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x$, también puede ser $\frac{x}{2}$
El producto de dos números	xy
El cociente de dos números	$\frac{m}{n}$
El cuadrado de un número, el cubo de otro número, etc.	x^2, x^3
Un número disminuido en 3 unidades	x – 3
Un número impar cualquiera	$2a + 1$
Tres números consecutivos cualquiera	$k, \quad k + 1, \quad k + 2$
La mitad del cubo de la suma de dos números	$\frac{(x+y)^3}{2}$

Ejercicio

1. Un número cualquiera aumentado en 5 unidades. ________________________________
2. Cinco veces un número cualquiera. ____
3. La suma de los cuadrados de dos números cualquiera diferentes. ___________________
4. La tercera parte de la diferencia de dos números. _________________________________
5. La suma de dos números cualquiera entre la diferencia de ellos mismos. _____________

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 3.1, lista de cotejo para la solución de ejercicios que puedes encontrar en "Instrumentos para evaluación".

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones / Propone procesos de solución identificando posibles errores / Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.
- **Atributos:** 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento:** Lenguaje algebraico.

Lectura previa

Expresiones algebraicas

Para poder avanzar en el estudio del álgebra es necesario comprender la terminología que se usa en las expresiones algebraicas y cada uno de sus elementos. A continuación, se describen y se ejemplifican estos conceptos.

- **Término:** Está formado por una combinación de números y letras enlazados por operaciones de multiplicación o división. En una expresión algebraica los términos están separados por signos de enlace +, -.
  Por ejemplo: $3x^2$, $8x^3y^3z$ son los términos de la expresión algebraica $3x^2 + 8x^3y^3z$.

- **Factor:** es cada uno de los componentes de un término.
  Por ejemplo: 3 y x^2, son los factores del término $3x^2$.

- **Parte literal:** La parte de un término que contiene a las letras. Puede incluir exponentes.

- **Constante:** Son los números o las letras que simbolizan un valor específico constante.
  Por ejemplo: 3, 20, 3.1416, constante de gravedad de la tierra g= $9.8\,{}^{m}/_{s^2}$

- **Coeficiente:** Generalmente es una constante. Pero una vez elegida una parte variable, el coeficiente, es lo queda del término, puede ser numérico o literal
  Por ejemplo: 8 es el coeficiente de x^3y^3z,
  x^3 es el coeficiente cuando se elige como parte variable $8y^3z$,
  z es el coeficiente de $8x^3y^3$

En general, cuando el coeficiente es 1, no se escribe: por ejemplo, en el término *ab* el coeficiente es 1.

- **Grado:**

a) De absoluto un término: es la suma de los exponentes de las variables. Por ejemplo: el grado del término $8x^3y^3z$ es 7.
   Si el término está formado solo por una constante, el grado de este término es cero.
b) De un término con respecto a una variable determinada: es el exponente de dicha variable.
   Por ejemplo: el grado del término $8x^3y^2z$ con respecto a x es 3, con respecto a y es 2, con respecto a z es 1.
c) De un polinomio con respecto a un variable: es el mayor exponente con el que aparece la variable especificada.

Ejemplos

Término	Signo	Coeficiente numérico	Parte literal	Grado	
				Absoluto	Con respecto a la variable x
p	+	1	p	1	0
$-2xy^3$	–	–2	xy^3	1+3= 4	1
$6a^4x^{-2}z$	+	6	$a^4x^{-2}z$	4 + (– 2)+1= 3	2
$\frac{m^6nx^7}{3}$	+	$\frac{1}{3}$	m^6nx^7	6+1+7= 14	7
– 7	–	– 7	No tiene	0	0

Clasificación de expresiones algebraicas
Una expresión algebraica puede estar formada por uno o más términos. Para unir a dichos términos se usan los signos de +, -.

Signos de enlace

$$9y - 2x^3y - 17$$

Tiene 3 términos

Dependiendo del número de términos que contenga una expresión algebraica se le puede dar un nombre particular.

Monomio	Binomio	Trinomio	Polinomio
Expresión algebraica en la que no hay sumas ni restas, tiene un solo término	Expresión algebraica de dos términos	Expresión algebraica de tres términos	Expresión algebraica de cuatro o más términos, aunque puede usarse como sinónimo de expresión algebraica
Ejemplo: $3xz^2$ ab 5y $-\frac{1}{2}w$	Ejemplo: –4m + 2n 7x + 5xy	Ejemplo: $\frac{3}{4}m + \frac{1}{2}n - 4.5$ $9y - 2x^3y - 17$	Ejemplo: $8a^2 - 27b + 4c - 25$

Actividad 3.2

Instrucciones

1. Copia en tu libreta la tabla y completa los espacios en blanco identificando los elementos de cada término como se muestra en los ejemplos anteriores. En el encabezado deberá llevar el título de la actividad, el número de bloque, la fecha, tu nombre completo, grado y grupo.

Término	Signo	Coeficiente numérico	Parte literal	Grado	
				Absoluto	Con respecto a la variable m
5					
$-a^2$					
$-7m^6k$					
$250mp^2r$					
$\frac{3}{4}m^{-4}n^6$					

2. Escribe sobre la línea el nombre que corresponde a cada expresión de acuerdo con la clasificación de número de términos.

   a) $3x^2 + 8x^3y^3z$ ____________________
   b) $-753ac^2x^3yz^6$ ____________________
   c) $a + b - c$ ____________________
   d) x ____________________
   e) $2x^4 - x^3 + 7x^2 - x + 8$ ____________________

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 3.2, lista de cotejo para la solución de ejercicios que puedes encontrar en “Instrumentos para evaluación”.

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.
- **Atributos:** 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento:** Leyes de los exponentes.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Ley de los exponentes

La potencia es una operación de multiplicación, donde los factores que se multiplican son iguales. El exponente indica el número de veces que aparece como factor la base.

$$\text{base} \rightarrow 4^{3} \leftarrow \text{exponente}$$

$$4^3 = (4)(4)(4) = 64$$

Los ejemplos que se muestran en esta sección son enteros, pero las leyes de los exponentes funcionan y pueden aplicarse de igual manera con exponentes positivos o negativos, enteros o fraccionarios.

Ley 1. Al hacer una multiplicación de dos potencias con bases iguales los exponentes se suman.

Multiplicar $x^3 (x^4) =$

En forma desarrollada, aplicando la definición de potencia, podría resolverse así:

a) $x^3 (x^4) = (x \cdot x \cdot x) (x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^7$

De este proceso podemos observar que el resultado es una nueva potencia con la misma base, que tiene como exponente a la suma de los exponentes de las potencias de la operación. Por lo que, podemos simplificar el proceso y reducirlo a un procedimiento rápido, al que llamaremos ley de los exponentes para multiplicar dos potencias con bases iguales.

$$x^3(x^4) = x^{3+4} = x^7$$

simbólicamente esta ley puede expresarse como la **Ley 1:** $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Ejemplos

$5^2(5^7) = 5^{2+7} = 5^9$ $\qquad m^4 \cdot m^{-5} = m^{4+(-5)} = m^{-1}$ $\qquad x \cdot x = x^{1+1} = x^2$

Ley 2. Al hacer una división de dos potencias con bases iguales los exponentes se restan.

Caso 1) El exponente en el numerador es mayor que el del denominador.

Dividir $\frac{x^5}{x^3}$

Aplicando la definición de potencia, y la propiedad de que al dividir un número entre sí mismo el resultado es 1. ($\frac{x}{x} = 1$)

$$\frac{x^5}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot x \cdot x = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x \cdot x = x^2$$

De donde se puede intuir que el resultado puede obtenerse directamente, ya que en el resultado se obtiene una potencia con la misma base y como exponente la resta de los dos exponentes de la operación original.

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

Lo que puede generalizarse como una ley de los exponentes. **Ley 2.**

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Es importante mencionar que las bases de las potencias no pueden ser cero, ya que la división entre cero, no existe.

Ejemplos

$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$ $\qquad \frac{k^6}{k} = k^{6-1} = k^5$ $\qquad \frac{x^{18}}{x^{17}} = x^{18-17} = x^1 = x$

Caso 2) Si las potencias con bases iguales que se dividen tienen la característica de que el exponente en el numerador es menor que el exponente del denominador, el resultado será una potencia con exponente negativo.

Ejemplo

$\frac{x^2}{x^5}$ aplicando la ley anterior tenemos que $x^{2-5} = x^{-3}$

Si está misma división se realiza de forma desarrollada, se puede observar una propiedad que se puede generalizar como una tercera ley de los exponentes.

Ley 3. Potencia negativa. Toda potencia cuyo exponente sea negativo es equivalente a una fracción que tiene numerador 1 y en el denominador una potencia formada con la misma base y el mismo exponente, pero con signo positivo.

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}$$

Por la propiedad transitiva de la igualdad, se tienen dos expresiones que resultan de la misma operación, por lo tanto, son iguales entre sí.

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3} \qquad con\ x \neq 0$$

Simbólicamente **Ley 3**.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad con\ a \neq 0}$$

Ejemplos

$\frac{7^4}{7^6} = 7^{4-6} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

$\frac{m^6}{m^7} = m^{6-7} = m^{-1} = \frac{1}{m}$

Caso 3) Si las potencias que se dividen tienen bases y exponentes iguales.

$\frac{x^4}{x^4}$ aplicando la ley anterior tenemos que $x^{4-4} = x^0$

Ley 4. Potencia cero. Todo número elevado a la potencia cero es igual a 1, excepto cero a la potencia cero.

$$\frac{x^4}{x^4} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Las dos respuestas de la misma operación, obtenidas por procesos diferentes, también son iguales entre sí. Por lo tanto $x^0 = 1$.

En general para cualquier número, excepto cero, elevado al exponente cero, se tiene la **Ley 4**.

$$\boxed{a^0 = 1 \qquad a \neq 0}$$

Ejemplos

$8^0 = 1$ $(-5)^0 = 1$ $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ $x^0 = 1$ $(a+b)^0 = 1$

El signo de las potencias.
Al elevar a un número positivo a cualquier potencia el resultado será un número positivo, ya que esto equivale a un producto en el que todos los factores son positivos.

Ejemplos

La base 5 es positiva, elevado a diferentes tipos de exponentes se tienen resultados positivos.

$5^3 = (5)(5)(5) = 125$ $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ $5^0 = 1$

En el caso de las potencias de cantidades negativas:

1. Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva.
2. Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa.

Ejemplos

Se eligen como bases números negativos.

Con exponentes pares da positivo
$(-3)^2 = (-3)(-3) = +9$
$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = +16$

Con exponentes impares da negativo
$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$
$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

Actividad 3.3

Instrucciones

1. Copia en tu libreta los siguientes ejercicios y resuelve aplicando las leyes de los exponentes que correspondan, como se muestra en los ejemplos anteriores. En el encabezado del trabajo deberá llevar el título de la actividad, el número de bloque, la fecha, tu nombre completo, grado y grupo.

$2^9(2^5) =$	$b^7 \cdot b^2 =$	$y \cdot y =$
$\frac{9^4}{9^4} =$	$\frac{15^4}{15} =$	$\frac{k^8}{k^{10}} =$
$\frac{3^4}{3^5} =$	$\frac{m}{m} =$	$2^0 =$
$(-12)^0 =$	$\left(\frac{5}{2}\right)^0 =$	$z^0 =$

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 3.3, lista de cotejo para la solución de ejercicios que puedes encontrar en “Instrumentos para evaluación”.

Actividad 4

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones / Propone procesos de solución identificando posibles errores / Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.
- **Atributos:** 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento:** Operaciones con polinomios.

Lectura previa

Operaciones con expresiones algebraicas

a) Reducción de términos semejantes

Términos semejantes: Cuando dos monomios tienen la misma parte literal, es decir, las mismas letras con los mismos exponentes, se les llama términos semejantes. Observemos los siguientes ejemplos:

$$8 \qquad 7 \qquad 25$$

son términos semejantes, porque en los tres términos no hay parte literal.

$$2n \qquad 4.5n \qquad -3n$$

son términos semejantes porque coinciden en que los tres tienen a la variable "n" como parte literal

$$-4x^2y \qquad -1/4\ xy$$

No son términos semejantes porque, aunque tienen las mismas letras, una de ellas está elevada a un exponente diferente.

Cuando en una expresión algebraica existen dos o más términos semejantes se pueden reducir.

Ejemplo 1

Si se quiere simplificar la siguiente expresión algebraica, se observa que sus dos términos son semejantes

$$3mn + 4mn =$$

Aplicando la propiedad de los números reales, propiedad distributiva del producto con respecto de la suma. Y realizando la suma de los coeficientes, se reduce a un solo término con la misma parte literal.

$$3mn + 4mn = (3 + 4)\ mn = 7mn$$

Ejemplo 2

Reducir los términos semejantes de la siguiente expresión.

$2x^3 + 5x^2 - 7x + 2x^2 - x - 9x^3 + 1 =$ se identifican los términos semejantes
$(2x^3 - 9x^3) + (5x^2 + 2x^2) + (-7x - x) + 1 =$ se agrupan

$(2 - 9)x^3 + (5 + 2)x^2 + (-7 - 1)x + 1$ se aplica la propiedad distributiva
(el 1 que no tiene semejantes queda igual)
$= -7x^3 + 7x^2 - 8x + 1$ se realizan las operaciones de los paréntesis

b) Adición y sustracción de expresiones algebraicas

Las sumas o restas de expresiones algebraicas se realizan reduciendo los términos, para esto se eliminan los signos de agrupación y se aplican las propiedades de la suma y resta entre números reales. Cuando en la operación hay términos no semejantes, estos pasan directamente al resultado.

Ejemplo 3

Sumar las expresiones siguientes.
$(3x) + (5y - 4x)$
Se eliminan los signos de agrupación y se reordenan los sumandos aplicando la propiedad conmutativa de la suma, para poder operar con los términos semejantes:

$3x + 5y - 4x = 3x - 4x + 5y = (3 - 4)x + 5y = -1x + 5y$

En el resultado final se acostumbra no escribir el coeficiente 1, aunque también es correcto si se escribe.

$$-1x + 5y = -x + 5y$$

Ejemplo 4

Sumar los siguientes polinomios.

$(7x^2 - 4y - 5) + (-y + 3x^2 + 1) + (7y + 3)$

Otra forma de representar la suma de polinomios es realizando una ordenación donde se coloquen en la misma columna los términos semejantes (misma letra, mismo exponente), en caso de que el coeficiente no este escrito, se debe colocar un 1. Realizar las sumas y restas de los coeficientes y dejar la misma parte literal en cada columna.

$$\begin{array}{ccc} 7x^2 & -4y & -5 \\ 3x^2 & -1y & +1 \\ & 7y & +3 \\ 10x^2 & 2y & -1 \end{array}$$

La solución de la suma es el polinomio 10 x^2 +2y –1

El procedimiento para restar dos polinomios es similar, se extraen los términos de los paréntesis de agrupación y se reducen los términos semejantes. La diferencia con el procedimiento de la suma es que todos los términos de paréntesis que están precedidos por el signo de resta deben cambiar por el signo contrario al extraerse del paréntesis.

Ejemplo 5

Restar (8a + 5b – 4ab) – (+3ab –2a + 8)

Los términos del primer paréntesis (minuendo) 8a + 5b – 4ab se extraen con mismo signo,
En el polinomio del paréntesis que va después del signo de resta (sustraendo) cada término al extraerse cambia al signo contrario,
El recíproco: – (+3ab)= –3ab
El recíproco: – (–2a)= +2a
El recíproco: – (+ 8)= –8
Se reacomodan, colocando en la misma columna a los términos semejantes y se reducen sumando o restando según corresponda a sus signos.

$$\begin{array}{cccc} 8a & 5b & -4ab & \\ 2a & & -3ab & -8 \\ \hline 10a & +5b & -7ab & -8 \end{array}$$

La solución de la resta es (8a + 5b – 4ab) – (+3ab –2a + 8)= 10a+5b$-7ab-8$

c) Multiplicación y división de expresiones algebraicas

La multiplicación se separará para su estudio en este material en tres casos: 1) el producto de dos monomios, 2) el producto de un polinomio por un monomio y 3) el producto de dos polinomios.
1) Para *multiplicar dos monomios* como ($7x^2$) (2xy), se aplica la propiedad conmutativa y asociativa de los números reales para separar todos sus factores y reacomodarlos, como se muestra a continuación. Después se multiplican los coeficientes numéricos entre sí, y se

multiplican los factores literales que son potencias con bases iguales aplicando la ley de los exponentes.
Recuerda que cuando una potencia no tiene exponente escrito, el valor de su exponente es 1. Otro aspecto para recordar es que, al multiplicar dos potencias con bases iguales, los exponentes de suman.

$$(7)\ (2)\ (x^{2})\ (x)\ (y) = 14x^{3}\ y$$

Ejemplos

$$\left(\frac{2}{3}y\right)(-3y^4) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-3}{1}\right)(y^1)(y^4) = \frac{-6}{3}y^5 = -2y^5$$

$$(-2ab^3)(-a^2b^5) = (-2)(-1)(a)(a^2)(b^3)(b^5) = +2a^3b^8$$

$$(7x)(x^2)(x) = 7x^4$$

2) En la *multiplicación de un polinomio por un monomio*, se aplica la propiedad distributiva multiplicando al monomio para cada término del polinomio.

Ejemplo 6

$(2x + 3xz - 2z^4)\ (-5x^2z) =$

$(2x + 3xz - 2z^4)\ (-5x^2z)\ =$ Se aplica la propiedad distributiva

$(2x)\ (-5x^2z) + (3xz)\ (-5x^2z) - (2z^4)\ (-5x^2z) =$ La multiplicación se convierte en tres multiplicaciones de monomios.

$= -10x^3z - 15x^3z^2 + 10x^2z^5$

En el resultado, el polinomio no tiene términos semejantes, por lo tanto, no se puede reducir.

3) *Multiplicación de dos polinomios*. Se aplica también la propiedad distributiva, a cada uno de los términos de un polinomio, con todos los términos del otro polinomio. Puede resolverse de dos formas: la primera ordenando los términos de manera lineal y a segunda colocándolos en forma de columnas, ordenados por términos semejantes. El último paso es reducir los términos semejantes.

Ejemplo 7

Multiplica $(3x+2)(6x-1) = (3x+2)(6x)+(3x+2)(-1)=$

$$
\begin{aligned}
&= (3x)(6x)+(2)(6x)+(3x)(-1)+(2)(-1)\\
&= 18x^2+12x-3x-2\\
&= 18x^2+9x-2
\end{aligned}
$$

Multiplica $(a^2+3ab-b^2)(a+2b)$ colocando en forma vertical los términos, ordena identificando los términos semejantes (pueden quedar espacios vacíos si no todos los términos tienen semejantes), suma y resta para reducir dichos términos.

$$
\begin{array}{rrrr}
 & a^2 & +3ab & -b^2 \\
 & & a & +2b \\
\hline
 & +2a^2b & +6ab^2 & -2b^3 \\
a^3 & +3a^2b & -ab^2 & \\
\hline
a^3 & +5a^2b & +5ab^2 & -2b^3
\end{array}
$$

d) División de un polinomio entre un monomio

La división por su estructura también la analizaremos en 3 casos:

1) *División de un monomio entre otro monomio*:

Se dividen primero los coeficientes y después las literales, aplicando la ley de los exponentes para dividir potencias de la misma base. Si existen literales diferentes solo se colocan en la solución sin modificarse.

Ejemplo 8

$$\frac{6x^4y^2z}{-3x^3y^2}=\frac{6}{-3}\cdot\frac{x^4}{x^3}\cdot\frac{y^2}{y^2}\cdot\frac{z}{}=-2xy^0z=-2x(1)z=-2xz$$

Nota: Recordemos que por las leyes de los exponentes $y^0=1$.

2) *División de un polinomio entre otro monomio:*

Se separa a los términos del polinomio del numerador colocando el monomio del denominador como divisor de cada uno. Se realiza cada división de monomios como en el caso anterior:

Ejemplo 9

$$\frac{3b^2 + 4b^3c}{2bc} = \frac{3b^2}{2bc} + \frac{4b^3c}{2bc} = \frac{3b}{2c} + 2b^2$$

3) *División de un polinomio entre otro polinomio*:

Ejemplo 10

Dividir $(x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x) \div (x^2 + 3x - 5)$

a) Se ordenan los términos de los polinomios en forma descendente con respecto al exponente de una variable. Si algún término con potencia consecutiva no se encuentra en el polinomio, se representa con el coeficiente cero para marcar el lugar de dicho término.
b) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, aplicando la ley de los exponentes.
c) El resultado de la división se coloca en el cociente.
d) Este término se multiplica por el divisor, colocando el resultado debajo del dividendo.
e) Se restan el dividendo y el resultado de la multiplicación del cociente por el divisor, se recomienda que para hacer la resta se tomen los inversos aditivos (cambiar el signo de los términos del sustraendo).
f) Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y se repite el proceso.
g) La división termina hasta que el residuo es de menor grado que el divisor.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 8x + 19 \\
\hline
x^2+3x-5 & x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x \\
 & -x^4 - 3x^3 + 5x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad - 8x^3 - 5x^2 + 15x \\
 & \quad +8x^3 + 24x^2 - 40x \\
\cline{2-2}
 & \qquad +19x^2 - 25x \\
 & \qquad -19x^2 - 57x + 95 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad - 82x + 95
\end{array}
$$

Actividad 3.4

Instrucciones

1. Copia en tu libreta los siguientes ejercicios y resuelve según corresponda, como se muestra en los ejemplos anteriores. En el encabezado del trabajo deberá llevar el título de la actividad, el número de bloque, la fecha, tu nombre completo, grado y grupo.

I. Reducción de términos semejantes

$m + m + m =$ $\quad$ $3a + 5a + 7a =$ $\quad$ $-8x + 4x + x - 2x =$

$3.5y^2 - 4y - 7y - 1.2y^2 =$ $\quad$ $2x^3 - x^2 + 5x^3 - x^2 + xy^2 - x^2y + 7 - 4x^2y + xy^2 =$

II. Suma y resta

$(3a + 2b - 5c) + (a - 7b - c) =$ $\quad$ $(6x - 2y - 3z) - (-x + 7y + 2z) =$
$(4x^2 - 3x + 9) + (x^2 - x - 12) =$ $\quad$ $(x^3 - 15x^2 + 8x) - (4x^3 + 2x) =$
$(m^5 + 4p^3) + (2m^5 - p^3) + (-6m^5 + 5p^3) =$ $\quad$ $(5a^2b + 7ab - ab^2) - (a^2b + 9ab - ab^2) =$

III. Multiplicación

$(x^5y)(3x^2y) =$ $\quad$ $5k^3(-2k^2 + 8k - 1) =$ $\quad$ $(m + 5)(m - 3) =$
$(-3a^2b^4c)(-7a^3bc^2) =$ $\quad$ $x^2y\,(7x^2 - 3x + 4) =$ $\quad$ $(3x - 1)(2x + 7) =$
$(-2z)(-z)(-3z) =$ $\quad$ $-8\,(-5 + a + 2b) =$ $\quad$ $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2) =$

IV. División

$\frac{6x^4y^{10}}{3x^2y^{10}} =$ $\quad$ $\frac{15z^3 + 30z^2}{5z^2} =$

$\frac{-21m^5n^4}{-7m^4n^5} =$ $\quad$ $\frac{8a^3b^5 + 10a^4b^4 - 6a^2b}{-2a^2b} =$

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 3.4, lista de cotejo para la solución de ejercicios que puedes encontrar en “Instrumentos para evaluación”.

Actividad 5

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones / Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- **Atributos:** 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento:** Productos notables.

Lectura previa

Productos notables

Productos notables. Son aquellas multiplicaciones que por su estructura pueden resolverse fácilmente por simple observación. Existen más tipos de productos notables que los que se presentan en este material, en la sección Material sugerido podrás encontrar algunas recomendaciones para investigarlos y profundizar en el tema.

Producto de dos binomios conjugados

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

La suma de dos términos multiplicada por su diferencia se llama producto de dos binomios conjugados y es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término. Al resultado se le llama diferencia de cuadrados.

Ejemplos

$(4x + 9y)(4x - 9y) = 16x^2 - 81y^2$

a) El cuadrado del 1er término es $(4x)(4x) = 16x^2$

b) El cuadrado del 2do término es $(9y)(9y) = 81y^2$

$(m - 7)(m + 7) = m^2 - 49$

$(a^3 + 5b^4)(a^3 - 5b^4) = a^6 - 25b^8$

Binomio al cuadrado

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

El cuadrado de la suma (o resta) de dos términos es igual al cuadrado del primer término más (menos) el doble producto de ambos términos más el cuadrado del segundo término.

Ejemplos

$(3x + 5)^2 =$

a) El cuadrado del 1er término es $(3x)(3x) = 9x^2$

b) El doble producto de ambos términos es $2(3x)(5) = (6x)(5) = 30x$

c) El cuadrado del 2do término es $(5)(5) = 25$

Entonces $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$

Ejemplo: $(5x - 8y^3)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(8y^2) + (8y^3)^2$

$= 25x^2 - 80xy^2 + 64y^6$

Actividad 3.5

Instrucciones

1. Copia en tu libreta los siguientes ejercicios y resuelve los productos notables siguientes. En el encabezado del trabajo deberá llevar el título de la actividad, el número de bloque, la fecha, tu nombre completo, grado y grupo.

$(a + 3)(a - 3) =$
$(5x + 1)(5x - 1) =$
$(8 - m)(8 + m) =$
$(y^2 + z)(y^2 - z) =$
$(4r^5 - 7s^3)(4r^5 - 7s^3) =$

$(m + 3)^2 =$
$(x - 4)^2 =$
$(2a + 9)^2 =$
$(7p^5 - 6q)^2 =$
$(12x + y)^2 =$

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 3.5, lista de cotejo para la solución de ejercicios que puedes encontrar en “Instrumentos para evaluación”.

Actividad 6

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones / Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- **Atributos:** 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones / 8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- **Conocimiento:** Factorización.

Lectura previa

Factorización

La factorización, consiste en encontrar a los factores que al multiplicarse dan lugar a la expresión que se desea factorizar.

15 su factorización es (3)(5) porque (5)(3) da 15

$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$ porque $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

Estudiaremos algunos tipos de factorización. En la sección de material sugerido podrás encontrar referencias bibliográficas para ampliar la información sobre el tema.

a) Factor común

La factorización de un término común consiste en identificar a aquellos factores que se repiten en todos los términos de una expresión algebraica.

El proceso para identificar el factor común de un polinomio consiste en calcular el mínimo común múltiplo de los coeficientes y las literales que aparecen en todos los términos con la mínima potencia. Después se aplica la propiedad distributiva, dividiendo cada término por el factor común y se anota dentro de un paréntesis.

Ejemplo: am + bm + cm

No tiene coeficientes, así que *m* es factor en cada uno de los términos; aplicando la propiedad distributiva y dividiendo cada término:

$$\frac{am}{m} = a \qquad \frac{bm}{m} = b \qquad \frac{cm}{m} = c$$

se obtiene su factorización.

am + dm + cm = m (a + b + c)

Ejemplo 1

$25\ x^3 + 10\ x^2 - 15\ x^4$
El mínimo común múltiplo de 25, 10 y 15 es 5.
La potencia de base x se repite en todos los términos, se elige la que tiene menor exponente x^2.
Con estos elementos se obtiene que el factor común para la factorización es $5x^2$.
Con el factor común se divide a cada término del polinomio.

$$\frac{25x^3}{5x^2} = 5x \qquad \frac{10x^2}{5x^2} = 2 \qquad \frac{-15x^4}{5x^2} = -3x^2$$

Entonces, la factorización por término común es: $5x^2(5x + 2 - 3x^2)$

b) Diferencia de cuadrados

Cuando la expresión algebraica que se quiere factorizar, este formada por la resta de dos términos cuadráticos, su factorización es un par de binomios conjugados. Para obtener a estos binomios, se calcula la raíz cuadrada de cada uno de los términos de la expresión algebraica original. En un paréntesis se colocarán estás dos raíces como una suma y en otro como una resta.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)}$$

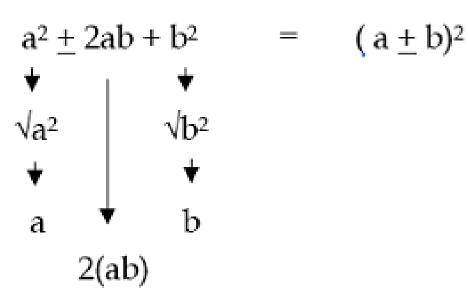
Ejemplos

Factorizar $\quad x^2 - 64 =$
Se observa que la expresión tiene dos términos, que ambos son cuadrados y que están separados por un signo menos, por lo tanto, es una diferencia de cuadrados.
La raíz cuadrada de x^2 es $\quad \sqrt{x^2} = x$
La raíz cuadrada de 64 es $\quad \sqrt{64} = 8$
Con las raíces se forman los binomios $(x + 8)(x - 8)$ que es la factorización buscada.

Otro ejemplo: $\quad 36\ a^2 - 25\ b^2 = (6\ a + 5\ b\ )\ (\ 6\ a - 5\ b\ )$

c) Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es una expresión algebraica de tres términos que debe cumplir algunas condiciones particulares para poder ser factorizado. El primero y tercer términos deben tener raíz cuadrada exacta. El segundo término debe ser el doble del producto de las dos raíces obtenidas en el paso anterior.



Si el trinomio cumple con las características anteriores entonces se le llama trinomio cuadrado perfecto y su factorización es un binomio elevado a la potencia dos. Los términos del binomio son las raíces obtenidas del primer y tercer términos enlazados con un signo que sea igual al signo de enlace del segundo término del trinomio.

Ejemplos

Factorizar $x^2 + 6x + 9$

Primero se comprueba que es trinomio cuadrado perfecto:
Raíz cuadrada del primer término $\sqrt{x^2} = x$
Raíz cuadrada del tercer término $\sqrt{9} = 3$
El doble del producto de estas dos raíces: $2(x)(3) = 6x$

El trinomio es cuadrado perfecto porque cumple con las tres condiciones. Por lo tanto, su factorización es un binomio al cuadrado, que se forma con las dos raíces y el signo del segundo término del trinomio.

$$(x + 3)^2$$

Otro ejemplo: Factorizar $64a^2 - 80ab + 25b^2$

Raíz cuadrada del primer término $\sqrt{64a^2} = 8a$
Raíz cuadrada del tercer término $\sqrt{25b^2} = 5b$
El doble del producto de estas dos raíces: $2(8a)(5b) = 80ab$

El trinomio es cuadrado perfecto porque cumple con las tres condiciones. Por lo tanto, su factorización es un binomio al cuadrado, que se forma con las dos raíces y el signo del segundo término del trinomio.

$$(8a - 5b)^2$$

Actividad 3.6

Instrucciones

1. Copia en tu libreta los siguientes ejercicios, identifica qué tipo de expresión se solicita factorizar, comprueba si son factorizables con los métodos estudiados y resuelve como se muestra en los ejemplos anteriores. En el encabezado del trabajo deberá llevar el título de la actividad, el número de bloque, la fecha, tu nombre completo, grado y grupo.

$\mathrm{ak} + \mathrm{bk} + 3\mathrm{k} =$	$\mathrm{x}^2 - 81 =$	$\mathrm{y}^2 + 10\mathrm{y} + 25 =$
$8t^5 + 3t^4 - 5t^3 - t^2 =$	$1 - 16x^2 =$	$16m^2 - 34mn + 9n^2 =$
$3a^4m^2 + 6a^3m =$	$9a^2 - 25b^2 =$	$x^2 + 14xy + 49y^2 =$

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 3.6 lista de cotejo para la solución de ejercicios que puedes encontrar en "Instrumentos para evaluación".

Actividad 7

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones / Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- **Atributos:** 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento:** Fracciones algebraicas.

Lectura previa

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es un cociente de dos polinomios.

$$\frac{5x+2}{-3x} \qquad \frac{x^2-y^2}{x+y} \qquad \frac{1}{2abc}$$

Para realizar operaciones con fracciones algebraicas se utilizan las mismas reglas que en la aritmética, y las leyes de los signos correspondientes a cada operación.

a) Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción algebraica es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos no tengan divisores comunes.

Para simplificar una fracción algebraica, cada polinomio se factoriza y se cancelan los factores comunes.

Ejemplos

Simplificar

$$\frac{5x^2}{10x^2-5x}$$

Se factorizan ambos polinomios:

$$\frac{5x\cdot x}{5x(2x-1)} = \frac{\cancel{5x}}{\cancel{5x}}\cdot\frac{x}{2x-1} = \frac{x}{2x-1}$$

Otro ejemplo: Simplificar

$$\frac{x^2-14x+49}{x^2-49} =$$

Se factorizan ambos polinomios y se cancelan los factores iguales:

$$\frac{(x-7)(x-7)}{(x+7)(x-7)} = \frac{(x-7)\cancel{(x-7)}}{(x+7)\cancel{(x-7)}} = \frac{x-7}{x+7}$$

Actividad 3.7

Instrucciones

1. Copia en tu libreta los siguientes ejercicios y resuelve aplicando las leyes de los exponentes que correspondan, como se muestra en los ejemplos anteriores. En el encabezado del trabajo deberá llevar el título de la actividad, el número de bloque, la fecha, tu nombre completo, grado y grupo.

Ejercicio: Simplificación de expresiones algebraicas.

$$\frac{6a^2b^4}{15a^3b^5c^2} =$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 6} =$$

$$\frac{a^2 + ab}{ab + b^2} =$$

$$\frac{k^2 - 25m^2}{k^2 + 15km} =$$

$$\frac{\mathrm{x}^2 - 25}{\mathrm{x} + 5} =$$

$$\frac{y - 3}{y^2 - 6y + 9} =$$

Evaluación

- La actividad será evaluada con el instrumento 3.7 lista de cotejo para la solución de ejercicios que puedes encontrar en "Instrumentos para evaluación".

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE IV. Ecuaciones lineales

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas de forma colaborativa mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** ecuaciones lineales de una variable.

Lectura previa

Situación didáctica:[8]

Al volar sobre un palomar, dijo el gavilán:
- Adiós mis 100 palomas.

A lo que las palomas respondieron: -- No somos 100, pero nosotras más nosotras, más la mitad de nosotras, más un cuarto de nosotras, más tú, gavilán, sí seríamos 100.
¿cuál es el número de palomas?

A continuación, te presentaré los **conceptos básicos**[9] para aprender a resolver ecuaciones.

Igualdad es la expresión que indica que dos cantidades tienen el mismo valor. Ejemplos:

$$8 = 6 + 2\,; \quad a = b + c; \qquad 3x^2 = 4x + 5$$

Ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas ***incógnitas*** y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Las ***incógnitas*** se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z.

Así, $\boldsymbol{x + 2 = 7}$ es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, y esta igualdad sólo es verdadera si $x = 5$.
Si sustituyes la x por 5 en $x + 2 = 7$, tienes $7 = 7$.
Si das a x un valor distinto de 5, la igualdad ***no se verifica*** o **no es verdadera.**

Miembro: Se llama ***primer miembro*** de una ecuación o de una identidad a la expresión que está a la ***izquierda*** del signo de igualdad o identidad, y ***segundo miembro***, a la expresión que está a la derecha. Observa:

En la ecuación $3x - 5 = 2x + 3$,

$3x - 5$ es el primer miembro y $2x + 3$, es el segundo miembro

En $x + 2 = 7$,

$x + 2$ es el primer miembro y 7 es el segundo miembro.

[8] (Colegio de bachilleres del estado de Quintana Roo, 2011)
[9] (Baldor, 1989)

Término es cada una de las cantidades que están conectadas con otra por el signo $+$ ó $-$. Así, en la ecuación $3x-5=2x+3$, los términos son $3x,\ -5,\ 2x,\ y\ 3$.

Grado de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación. Así, $4x-6=3x-1$, es una ecuación de ***primer grado, simples o lineales,*** porque el mayor exponente de x es 1. La ecuación $x^2-5x+6=0$ es una ecuación de ***segundo grado,*** porque el mayor exponente de x es 2. La ecuación $3x^3-5x^2+7x-1$ es una ecuación de ***tercer grado,*** porque el mayor exponente de x es 3.

Ejemplos de ecuaciones lineales y cómo identificarlas:

$7x+4=2x-8$; $\quad 2x-7y=-5$; $\quad 3z+4w=-2z+6w$; $\quad x+3y-2z=8$

La primera ecuación tiene una sola variable o incógnita y el mayor exponente que tiene esta es uno, por lo tanto se conoce como ***ecuación lineal o de primer grado con una incógnita o una variable***; las siguientes dos ecuaciones tienen dos variables y el mayor exponente que tienen estas es uno, por lo que se denominan ***ecuaciones lineales o de primer grado con dos incógnitas o variables;*** la última tiene tres variables y el mayor exponente que tienen estas es uno, por lo que se conoce como ***ecuación lineal o de primer grado con tres incógnitas o variables.***

Las ***raíces o soluciones*** de una ecuación, son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, si sustituyes el valor de la incógnita que encuentras en el o los lugares de las incógnitas, convierten la ecuación e identidad.

Así, en la ecuación $5x-6=3x+8$, la raíz es 7 porque haciendo $x=7$ se tiene $5(7)-6=3(7)+8,\quad o\quad sea,\quad 29=29$, donde vemos que 7 satisface la ecuación.
Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen ***una sola raíz.***

Técnicas que puedes usar para resolver ecuaciones lineales con una variable

I. Usando la propiedad fundamental de las ecuaciones[10].

Para resolver ecuaciones lineales o de primer grado, puedes utilizar las propiedades de la igualdad como:

1. La propiedad de la identidad o reflexiva de la igualdad establece que $a=a$.
2. La propiedad transitiva de la igualdad establece que si $a=b \quad y \quad b=c$, entonces $a=c$.
   Esta propiedad asume la forma de la propiedad de sustitución. Por ejemplo: si $x+a=c \quad y \quad a=b, \quad entonces \quad x+b=c.$
3. La propiedad simétrica de la igualdad establece que si $a=b,\ entonces\ b=a.$

Y la propiedad fundamental de las ecuaciones que establece lo siguiente:

> "Una ecuación se transforma en otra equivalente cuando se ejecutan operaciones elementales iguales en ambos miembros, es decir, ***si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales, los resultados serán iguales"***

[10] (Baldor,1989)

De esta propiedad se derivan las siguientes reglas[11]:

1. Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste. Observa:

Si tienes $3+5=8$, y a ambos miembros de la ecuación le sumas 6: $3+5+6=8+6$, la igualdad no se altera. Si ejecutas las operaciones en ambos miembros el resultado da $14=14$.

2. Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste. De nuevo, si a $3+5=8$ le restas 2: $3+5-2=8-2$, la igualdad no se altera. Si ejecutas las operaciones en ambos miembros el resultado te dará $6 = 6$.
3. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste. Observa que ahora, si a ambos miembros de la igualdad se multiplica por 4, la igualdad subsiste: $4(3+5)=8(4)$: $32=32$
4. Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste. Si decidieras dividir esa misma igualdad entre 2, la igualdad subsiste: $\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}$; el resultado de ambos miembros de la igualdad al dividir es $4 = 4$
5. Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste. Si a los dos miembros de la igualdad le extraes raíz cubica o elevaras a la potencia cúbica, la igualdad se sigue dando, observa:

$$(3+5)^3=8^3;\ 512=512$$
$$\sqrt[3]{3+5}=\sqrt[3]{8};\ 2=2$$

Procedimiento para resolver ecuaciones lineales con una incógnita

1. Si en la ecuación existen uno o varios términos que contienen la incógnita, éstos deberán situarse preferentemente al lado izquierdo de la igualdad y si es el caso, simplificarlos. En ocasiones deberán eliminarse previamente signos de agrupamiento.
2. Si en la ecuación existen uno o varios términos numéricos, éstos deberán situarse al lado derecho de la igualdad y si es el caso, simplificarlos.
3. Si el coeficiente de la incógnita es diferente de la unidad, se utilizará la propiedad de las ecuaciones que permitan convertirlo en la unidad.
4. El valor de la incógnita estará dado por esta última expresión.

Ejemplos

[12]Resuelve la ecuación $7x+8=2x-7$

1. **Sitúa todos los términos que contienen la incógnita, en este caso x, del lado izquierdo del signo igual y simplifica lo que te queda.**

En este ejemplo, puedes observar que hay dos términos que tienen la incógnita x: $7x$ y $2x$. De estos dos términos, $7x$ ya está del lado izquierdo del signo igual, y $2x$ está del lado derecho del signo igual. Por tanto, el que está fuera de lugar y se necesita quitar es $2x$.
Para quitarlo, deberás aplicar la propiedad del inverso aditivo, para que al sumarlo te quede cero, mira con atención: el inverso aditivo de $2x$ es $-2x$, de tal modo que $2x+(-2x)=0$. De este modo, habrás eliminado $2x$ en el segundo miembro.

[11] (Baldor, 1989)
[12] (Baldor, 1989)

Ahora bien, recuerda que una ecuación es una balanza, y si ya le pusiste $-2x$ a un lado de ella, también le debes poner la misma cantidad al otro lado para que la igualdad se siga dando. Así, la ecuación te quedará de la siguiente manera:

$$7x + 8 = 2x - 7$$
$$7x + 8 - \mathbf{2x} = 2x - \mathbf{2x} - 7$$

Simplificando en ambos lados de la igualdad, te quedará: $5x + 8 = -7$

2. Sitúa los términos numéricos del lado derecho del signo igual y simplifica lo que te queda.

Ahora, es momento que quites los términos numéricos (los términos que no contienen incógnitas) del lado izquierdo de la igualdad, ya que el lugar de éstos es el lado derecho del signo igual.

$$5x + 8 = -7$$

Si observas la ecuación que te quedó, los términos numéricos que tienes son $8\ y - 7$. De estos dos, el 8 está del lado izquierdo del signo igual, por lo que está fuera de lugar y hay que quitarlo. El -7 está del lado derecho del signo igual, que es donde debe estar, por lo que no se hace nada con él.

Para quitar 8 del lado izquierdo del signo igual, de la misma manera que en el paso 1, se aplica el inverso aditivo para lograr que de cero. Así que, a 8 se le suma -8, observa: $8 - 8 = 0$

Pero nuevamente, recuerda, si pusiste -8 del lado izquierdo del signo igual, también debes ponerlo del lado derecho, como a continuación se te presenta:

$$5x + 8 = -7$$
$$5x + 8 - \mathbf{8} = -7 - \mathbf{8}$$

Simplificando en ambos lados de la igualdad, te debe quedar lo siguiente:

$$5x = -15$$

3. Convierte al coeficiente de la incógnita en uno, si no lo es.

Como el coeficiente de la incógnita es diferente de la unidad, debes transformarlo en éste.

Observa que si el término del lado izquierdo (primer miembro) se multiplica por $\frac{1}{5}$, que es el inverso multiplicativo del coeficiente de x, tendrás: $\left(\frac{1}{5}\right)(5x) = \frac{5}{5}x = 1x = x$; de manera que el coeficiente de x ya se transforma en 1, que es lo que se busca.

Pero recuerda, que si multiplicas por $\frac{1}{5}$ el primer miembro, también debes multiplicar el segundo miembro por el mismo número, así tendrás:

$$\left(\frac{1}{5}\right)5x = -15\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{5}{5}x = -\frac{15}{5}$$
$$x = -3$$

4. **Comprueba la ecuación:**

$$7x + 8 = 2x - 7$$
$$7(-3) + 8 = 2(-3) - 7$$
$$-21 + 8 = -6 - 7$$
$$-13 = -13$$

Como puedes observar, -3 satisface la igualdad, por tanto, puedes concluir que $x = -3$ es la solución de la ecuación.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $2(x - 5) + 3(2x + 1) = 7x - 3$

1. **Para este tipo de ecuación, primero tienes que eliminar los paréntesis resolviendo las operaciones indicadas** (multiplicación de monomio por un polinomio), y **luego simplificas cada miembro de la ecuación.** Observa cómo va quedando la ecuación al multiplicar y luego simplificar en cada miembro de la ecuación.

$$\mathbf{2(x - 5) + 3(2x + 1) = 7x - 3}$$
$$2x - 10 + 6x + 3 = 7x - 3$$
$$8x - 7 = 7x - 3$$

2. **Ahora, tienes que eliminar los términos que contienen incógnitas del lado derecho del signo igual**

Para esta ecuación, tienes que eliminar $7x$ del segundo miembro; para lograr esto, añade $-7x$ a los dos miembros para que la ecuación siga en equilibrio; después de esto, simplifica la ecuación.

$$8x - 7 = 7x - 3$$
$$8x - 7 - \mathbf{7x} = 7x - 3 - \mathbf{7x}$$
$$x - 7 = -3$$

3. **A continuación, tienes que eliminar el término numérico que tienes del lado izquierdo del signo igual.**

Para este ejemplo, en el lado izquierdo de la ecuación, tienes que eliminar el -7 del primer miembro; para lograr esto, tienes que sumar a ambos miembros de la ecuación 7 y luego, simplificas ambos miembros de la ecuación.

$$x - 7 = -3$$
$$x - 7 + \mathbf{7} = -3 + \mathbf{7}$$
$$x = 4$$

Como puedes observar, una vez simplificados ambos miembros de la ecuación, la incógnita (x) ya queda despejada.

4. Comprueba la ecuación:

$$\mathbf{2(x-5)+3(2x+1)=7x-3}$$
$$2(4-5)+3[2(4)+1]=7(4)-3$$
$$2(-1)+3(8+1)=28-3$$
$$-2+3(9)=25$$
$$-2+27=25$$
$$25=25$$

Como puedes ver, 4 satisface la igualdad, por lo que puedes concluir que $x=4$ es la solución de la ecuación.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\mathbf{\frac{3z}{5}+\frac{7}{3}=-2z-\frac{5}{2}}$

1. **Para resolver ecuaciones que tiene fracciones, tienes que convertir los términos fraccionarios a enteros.**

   Para hacerlo, tienes que determinar el M.C.M. de los términos: $\frac{3z}{5},\frac{7}{3}\ y\ \frac{5}{2}$ y multiplicar los dos miembros de la ecuación por el M.C.M. El M.C.M. lo calculas tomando los denominadores de las fracciones, en este caso, 5, 3 y 2 es 30. Puedes consultar el bloque I, si necesitas recordar cómo se obtiene el MCM.

2. **Multiplica los términos situados a ambos lados de la igualdad por el MCM encontrado, observa:**

$$\frac{3z}{5}+\frac{7}{3}=-2z-\frac{5}{2}$$

$$30\left(\frac{3z}{5}+\frac{7}{3}\right)=30\left(-2z-\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{90z}{5}+\frac{210}{3}=-60z-\frac{150}{2}$$

3. **Efectúa las divisiones resultantes.**

Al dividir las fracciones, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$18z+70=-60z-75$$

4. Ahora, tienes que eliminar los términos que contienen incógnitas del lado derecho del signo igual.

Para esta ecuación, tienes que eliminar $-60z$ del segundo miembro; para lograr esto, añade $+60z$ a los dos miembros para que la ecuación siga en equilibrio; después de esto, simplifica la ecuación.

$$18z + 70 = -60z - 75$$
$$18z + 70 + \mathbf{60z} = -60z - 75 + \mathbf{60z}$$
$$78z + 70 = -75$$

5. Lo que sigue, es que tienes que eliminar el término numérico que tienes del lado izquierdo del signo igual.

Para este ejemplo, en el lado izquierdo de la ecuación, tienes que eliminar el 70 del primer miembro; para lograr esto, tienes que añadir a ambos miembros de la ecuación -70 y luego, simplificas ambos miembros de la ecuación.

$$78z + 70 = -75$$
$$78z + 70 - 70 = -75 - 70$$
$$78z = -145$$

6. **Para convertir al coeficiente de la incógnita en uno, si no lo es, tienes que multiplicar a toda la ecuación por el inverso multiplicativo del coeficiente de la incógnita.**

$$78z = -145$$
$$\left(\frac{1}{78}\right)78z = -145\left(\frac{1}{78}\right)$$
$$\frac{78}{78}z = -\frac{145}{78}$$

$$z = -\frac{145}{78}$$

7. Comprueba la ecuación.

$$\frac{3z}{5} + \frac{7}{3} = -2z - \frac{5}{2}$$

$$\frac{3\left(-\frac{145}{78}\right)}{5} + \frac{7}{3} = -2\left(-\frac{145}{78}\right) - \frac{5}{2}$$

$$\frac{-\frac{435}{78}}{5} + \frac{7}{3} = \frac{290}{78} - \frac{5}{2}$$

$$\frac{-435}{390} + \frac{7}{3} = \frac{290 - 195}{78}$$

$$\frac{-435+910}{390}=\frac{95}{78}$$

$$\frac{475}{390}=\frac{95}{78}$$

$$\frac{95}{78}=\frac{95}{78}$$

II. La otra forma que tienes para resolver una ecuación lineal es la transposición de términos[13].

La regla que usa la transposición de términos es la siguiente:

"Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro con su operación contraria".

Esto quiere decir, que puedes pasar un término que está sumando en un miembro al otro miembro con su operación contraria que es la resta; si está multiplicando en un miembro, lo puedes pasar al otro dividiendo; si está elevado a una potencia en un miembro, lo puedes pasar al otro miembro extrayéndole la raíz.

Ejemplos

1. Si en la ecuación $\boldsymbol{5x=2a-b}$, quieres cambiar la b del segundo miembro al primer miembro, lo puedes hacer solamente que, con la operación contraria, como b está restando en el segundo miembro tendrás que pasarlo sumando, observa cómo te queda:[14]
$$\boldsymbol{5x+b=2a.}$$
Si quieres cambiar $5x$, que está sumando en el primer miembro al segundo miembro tendrás que hacerlo restando y así te debe de quedar:
$$\boldsymbol{0=2a-b-5x.}$$

2. En esta ecuación:
$$\boldsymbol{-10x=20}$$
Si quieres pasar -10 del primer miembro (donde está multiplicando) al segundo miembro, lo debes pasar dividiendo, y te queda: $\boldsymbol{x=\frac{20}{-10}}$

3. En la ecuación $\boldsymbol{a=\frac{c}{b}}$**,** la b está dividiendo en el segundo miembro, si pasas este elemento al primer miembro, lo deberás pasar multiplicando, observa: $ab=c$.

[13] (Baldor, 1989)
[14] (Baldor, 1989)

En la siguiente ecuación: $t^2 = \frac{2e}{a}$, la t está elevada a una potencia (dos), si pasas la potencia al segundo miembro, lo deberás hacer con la operación contraria que es la raíz (cuadrada), y te queda:

$$t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$$

Solución de ecuaciones lineales usando la transposición de términos

1. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2. Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
3. Se reducen términos semejantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $3x - 5 = x + 3$

1. **Para este tipo de ecuación, deberás pasar los términos que contienen incógnita al primer miembro de la ecuación; y los términos numéricos (que no tienen incógnita) al segundo miembro de la ecuación**. Mira cómo te debe de quedar:

$$3x - 5 = x + 3$$
$$3x - x = 5 + 3$$

Como puedes ver, a x que estaba sumando en el segundo miembro, se pasó restando al primer miembro; y a -5 que estaba restando en el primer miembro, se pasó sumando al segundo miembro.

2. **Ahora, simplifica la ecuación en ambos miembros de la ecuación, y te queda:**

$$2x = 8$$

3. **Lo que sigue es despejar la incógnita, esto quiere decir, que hay que quitarle cualquier número que tenga.**

$$2x = 8$$

En esta ecuación, la incógnita está acompañada de un 2, con el cual se está multiplicando. Para pasarlo al segundo miembro, deberás pasarlo dividiendo, observa:

$$x = \frac{8}{2}$$

Al efectuar la división, el valor de la incógnita es: $x = 4$

4. Comprueba la ecuación.

$$\mathbf{3x - 5 = x + 3}$$
$$3(4) - 5 = 4 + 3$$
$$12 - 5 = 7$$
$$7 = 7$$

Como puedes ver, el valor encontrado hace que en ambos miembros subsista la igualdad, por lo que el valor encontrado es correcto.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$

1. **Puedes iniciar con simplificar los términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.**

   Al simplificar te queda: $-40x + 41 = -30x + 46$

2. **Sigue pasar los términos que contienen incógnita al primer miembro de la ecuación; y los términos numéricos (que no tienen incógnita) al segundo miembro de la ecuación**.

Deberás pasar sumando al primer miembro $-30x$, que está restando en el segundo al primer miembro; y al 41, que está sumando en el primer miembro, deberás pasarlo restando al segundo miembro, mira con atención como queda:

$$-40x + 41 = -30x + 46$$

$$-40x + 30x = 46 - 41$$

3. **Ahora, simplifica en ambos miembros de la ecuación:**

$$-40x + 30x = 46 - 41$$

$$-10x = 5$$

4. **Lo que sigue es despejar la incógnita, esto quiere decir, que hay que quitarle cualquier número que tenga.**

$$-10x = 5$$

En este caso, la incógnita está acompañada de -10, que está multiplicando con ella, por lo que, para pasarlo al otro lado de la igualdad, lo debes pasar dividiendo, observa:

$$x = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$$

5. Comprueba la ecuación:

$$35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$$

$$35 - 22\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) = 14 - 30\left(-\frac{1}{2}\right) + 32$$
$$35 + \frac{22}{2} + 6 + \frac{18}{2} = 14 + \frac{30}{2} + 32$$
$$35 + 11 + 6 + 9 = 14 + 15 + 32$$
$$61 = 61$$

Ejemplo

Resuelve la ecuación $10(x - 9) - 9(5 - 6x) = 2(4x - 1) + 5(1 + 2x)$

1. **Resuelve las operaciones indicadas.** Para este ejemplo, hay multiplicaciones que tienes que resolver, observa:
$$10(x - 9) - 9(5 - 6x) = 2(4x - 1) + 5(1 + 2x)$$
$$10x - 90 - 45 + 54x = 8x - 2 + 5 + 10x$$

2. **Simplifica los términos semejantes en ambos miembros de la igualdad.** Mira con atención como queda después de simplificar.
$$10x - 90 - 45 + 54x = 8x - 2 + 5 + 10x$$
$$64x - 135 = 18x + 3$$

3. **Pasa los términos que contienen incógnita al primer miembro de la ecuación; y los términos numéricos (que no tienen incógnita) al segundo miembro de la ecuación**.

$$64x - 135 = 18x + 3$$

En este ejemplo, $18x$ está sumando en el segundo miembro; tienes que pasarlo al primer miembro restando, el término numérico -135 está restando en el primer miembro, tienes que pasarlo al segundo miembro sumando. Mira como lo debes de escribir.

$$64x - 18x = 3 + 135$$

4. **Ahora, simplifica los términos semejantes en cada miembro de la ecuación.**

$$64x - 18x = 3 + 135$$
$$46x = 138$$

5. **Para ir terminando, despeja la incógnita, esto quiere decir, que hay que quitarle cualquier número que tenga.**
$$46x = 138$$

El número que acompaña a la x es 46, que está multiplicando; este número lo tienes pasar al segundo miembro dividiendo:
$$x = \frac{138}{46} = 3$$

6. **Comprueba la ecuación.**

$$10(x-9)-9(5-6x)=2(4x-1)+5(1+2x)$$
$$10(3-9)-9\big(5-6(3)\big)=2(4(3)-1)+5(1+2(3))$$
$$10(-6)-9(5-18)=2(12-1)+5(1+6)$$
$$-60-9(-13)=2(11)+5(7)$$
$$-60+117=22+35$$
$$57=57$$

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\frac{x}{2}=3x-\frac{3}{4}$

1. **Deberás encontrar primero el mínimo común múltiplo de los denominadores de la ecuación**, en este caso del 2 y 4. Al calcular, el $MCM=4$. Puedes consultar en el bloque 1, el proceso para hallarlo, si no lo recuerdas.

2. **Para eliminar las fracciones, multiplica toda la ecuación por el MCM.** Mira con atención:

$$\frac{x}{2}=3x-\frac{3}{4}$$

$$\boldsymbol{4\left(\frac{x}{2}=3x-\frac{3}{4}\right)}$$

Recuerda que, para multiplicar fracciones, es numerador por numerador, y denominador por denominador. Te quedará de la siguiente manera:

$$\frac{4x}{2}=12x-\frac{12}{4}$$

3. **Resuelve las divisiones que te quedan:**

$$2x=12x-3$$

4. **Pasa los términos que contienen incógnita al primer miembro de la ecuación; y los términos numéricos (que no tienen incógnita) al segundo miembro de la ecuación**.

Para esta ecuación, solamente tienes que pasar $12x$ restando al primer miembro.

$$2x-12x=-3$$

5. **Simplifica los términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.**

$$-10x=-3$$

6. **Para ir terminando, despeja la incógnita, esto quiere decir, que hay que quitarle cualquier número que tenga.** En este caso, el número que acompaña a la incógnita es -10, el cual está multiplicando, así que tienes que cambiarlo al segundo miembro dividiendo.

$$x = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$$

7. **Comprueba la ecuación.**

$$\frac{x}{2} = 3x - \frac{3}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{10}}{2} = 3\left(\frac{3}{10}\right) - \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{9}{10} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{36-30}{40}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{6}{40}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{20}$$

Ejemplo

Resuelve la ecuación $2 - \frac{x-1}{40} = \frac{2x-1}{4} - \frac{4x-5}{8}$

1. **Encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores de la ecuación**, para esta ecuación, los denominadores de la ecuación son el 40, el 4 y 8. Cuando calculas el MCM, este resulta en 40.

2. **Para eliminar las fracciones, multiplica toda la ecuación por el MCM.** Mira con atención:

$$\mathbf{40\left(2 - \frac{x-1}{40} = \frac{2x-1}{4} - \frac{4x-5}{8}\right)}$$

Recuerda que, para multiplicar fracciones, es numerador por numerador, y denominador por denominador. Te quedará de la siguiente manera:

$$80 - \frac{40x-40}{40} = \frac{80x-40}{4} - \frac{160x-200}{8}$$

3. **Resuelve las divisiones que te quedan y luego, las multiplicaciones,** observa:

$$80-(x-1)=20x-10-(20x-25)$$
$$80-x+1=20x-10-20x+25$$

4. **Puedes decidir simplificar los términos semejantes en cada miembro de la ecuación**. Te quedará así:

$$81-x=15$$

5. **Pasa los términos que contienen incógnita al primer miembro de la ecuación; y los términos numéricos (que no tienen incógnita) al segundo miembro de la ecuación**.

Para esta ecuación, solamente tienes que pasar 81 al segundo miembro restando, porque en el primer miembro está sumando.

$$-x=15-81$$

6. **Simplifica los términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.**

$$-x=-66$$

7. **Para ir terminando, despeja la incógnita, esto quiere decir, que hay que quitarle cualquier número que tenga.** En este caso, lo que acompaña a la incógnita es -1, así que una manera más sencilla de despejarla, es multiplicar toda la ecuación con -1.

$$-1(-x=-66)$$

$$x=66$$

8. **Comprueba la ecuación.**

$$\mathbf{2-\frac{x-1}{40}=\frac{2x-1}{4}-\frac{4x-5}{8}}$$

$$2-\frac{66-1}{40}=\frac{2(66)-1}{4}-\frac{4(66)-5}{8}$$

$$2-\frac{65}{40}=\frac{132-1}{4}-\frac{264-5}{8}$$

$$\frac{80-65}{40}=\frac{131}{4}-\frac{259}{8}$$

$$\frac{15}{40}=\frac{1048-1036}{32}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$$

Situaciones que se resuelven con ecuaciones lineales con una incógnita[15]:

Al volar sobre un palomar, dijo el gavilán:
- Adiós mis 100 palomas.

A lo que las palomas respondieron: -- No somos 100, pero nosotras más nosotras, más la mitad de nosotras, más un cuarto de nosotras, más tú, gavilán, sí seríamos 100.
¿cuál es el número de palomas?

Para este tipo de problemas, hay que identificar lo que necesitamos responder y especificar la letra que se usará para hallar el resultado. Una vez determinada la incógnita, con base a ella se irán armando el resto de los datos para luego plantear la ecuación.

Número de palomas: x Nosotras más nosotras: $x+x$ La mitad de nosotras: $\frac{x}{2}$ Un cuarto de nosotras: $\frac{x}{4}$ Tú, gavilán: 1 Total, de aves: 100 **Respuesta:** Como $x = 36$ y a x determinamos como el número de palomas, por tanto, la respuesta es: 36 palomas.	$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100$$ $MCM = 4$ Multiplicando toda la ecuación con el MCM $$4\left(x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100\right)$$ $$4x+4x+\frac{4x}{2}+\frac{4x}{4}+4=400$$ Dividiendo: $$4x+4x+2x+x+4=400$$ Simplificando en el primer miembro: $$11x+4=400$$ Pasando el 4 al segundo miembro: $$11x=400-4$$ Simplificando en el segundo miembro: $$11x=396$$ Despejando x:$x=\frac{396}{11}$ $$x=36$$ Verificando: $$36+36+\frac{36}{2}+\frac{36}{4}+1=100$$ $$36+36+18+9+1=100$$ $$100=100$$

En la tienda El mercadito, se ofrece todo a bajos precios por el cierre del año. Juan compró un cinturón, un traje y un par de zapatos, pagando en total $ 1, 740. Por los zapatos, pagó $ 50 más que el cinturón; por el traje, pagó $ 200 más que los zapatos. Determina el precio de cada artículo comprado por Juan.

[15] (Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, 2011)

Cinturón: x Zapatos: $x+50$ Traje: $(x+50)+200=x+50+200=x+250$ Total de pago: 1740 **Respuesta:** Como $x=480$, y x representa al cinturón, por tanto: El cinturón costó \$ 480; Los zapatos costaron \$ 50 más que el cinturón, así que los zapatos costaron $480+50=\$530$; El traje costó \$ 200 más que los zapatos, por tanto, el traje costó $530+200=\$\,730$ $480+530+730=1740$	$x+x+50+x+250=1740$ Simplificado el primer miembro: $3x+300=1740$ Pasar 300 al segundo miembro y simplificar: $3x=1740-300$ $3x=1440$ Despejar x: $x=\frac{1440}{3}=480$ Verificando: $480+480+50+480+250=1740$ $1740=1740$

Actividad 4.1

Instrucciones

1. En hojas de libreta o blancas, resuelve las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita.
2. Puedes usar cualquiera de los métodos abordados en este material.
3. Cuida el orden, la limpieza y legibilidad en tu trabajo.
4. Usa colores en el cuerpo del trabajo.

Ejercicios[16][17]:

1. $8x-4+3x=7x+x+14$
2. $21-6x=27-8x$
3. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$
4. $x+3(x-1)=6-4(2x+3)$
5. $\frac{4x+1}{3}=\frac{12x-3}{7}$
6. $4-\frac{x+3}{6}=2+\frac{9-2x}{3}$

7. Pagaste \$ 325 por un caballo, un coche y sus arreos. El caballo costó \$ 80 más que el coche y los arreos \$ 25 menos que el coche. Halla el costo de cada artículo.
8. Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. Halla el número de manzanas que hay en cada cesto

[16] (Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, 2011)
[17] (Baldor, 1989)

9. Halla cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 74.
10. De un tinaco lleno de agua, se saca la cuarta parte del contenido; después, se saca la mitad de lo que quedaba y aún quedan 1,500 litros. Calcula la capacidad del tinaco.

Evaluación

- Esta actividad, se evaluará con la rúbrica 4.1, que encontrarás en el apartado "Instrumentos para evaluación".

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas de forma colaborativa mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

Lectura previa[18]

Dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas **son simultáneas** cuando se satisfacen para iguales valores de las incógnitas.

Así, las ecuaciones $\begin{matrix} x+y=5 \\ x-y=1 \end{matrix}$ son simultáneas porque $x=3$ y $y=2$ satisfacen ambas ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.
Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene el siguiente modelo algebraico:

$$\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{matrix}$$

Así, $\begin{matrix} 2x+3y=13 \\ 4x-y=5 \end{matrix}$ es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

La solución de un sistema de ecuaciones, es un grupo de valores de las incógnitas que satisface todas las ecuaciones del sistema. La solución del sistema anterior es $x=2$ y $y=3$.

Un sistema de ecuaciones es posible o compatible cuando tiene solución y es imposible o incompatible cuando no tiene solución.

Para hallar la solución[19] a un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puedes aplicar los siguientes métodos. Observa el siguiente esquema.

Métodos de solución
- **Algebraicos**
  - Suma y resta, reducción o de Gauss
  - Igualación
  - Sustitución
- **Numérico:** determinantes
- **Gráfico**

[18] (Baldor,1989)
[19] (Baldor, 1989)

◉ Método de Suma y resta

Este método se basa en hacer iguales los coeficientes de una de las incógnitas sólo que con signo contrario con el propósito de eliminarla. Para hacer iguales los coeficientes, pero con signo contrario, la manera más sencilla es multiplicar un coeficiente por el otro coeficiente y viceversa. Si los dos coeficientes tienen signo positivo o negativo, a uno de ellos deberás multiplicar por el signo negativo y de esta manera obtener signos contrarios para poder eliminar la incógnita. Por ejemplo, si tienes los términos de esta manera:

$$3x$$
$$7x$$

Para lograr que queden los coeficientes iguales, multiplica $3x$ por el coeficiente 7, y luego multiplica $7x$ por el coeficiente 3, te quedaría así:

$$7(3x) = 21x$$
$$3(7x) = 21x$$

De esta manera ya están con el mismo coeficiente, sin embargo, si los simplificas te queda $42x$ y no 0, que es lo que se pretende. Para lograr que quede 0, entonces a uno de los términos (al que tú quieras) se multiplica por el signo menos. En esta ocasión se hará con el primer término. Observa:

$$-7(3x) = -21x$$
$$3(7x) = \quad 21x$$

Ahora sí, si simplificas $-21x + 21x = 0$

Otro ejemplo:

$$-5y \qquad 8(-5y) = -40y$$
$$8y \qquad 5\,(8y) = \quad 40y$$

Ahora sí, si simplificas $-40y + 40y = 0$.

En este ejemplo, no hubo necesidad de multiplicar uno de los términos con el signo negativo, porque ya están con signo contrario.

Ahora sí, a resolver el sistema usando este método. A continuación, te enlistaré los pasos para que llegues a la solución del sistema.

Nota: Para hacerte más comprensible los pasos, los números 1) y 2) que aparecen a la izquierda de las ecuaciones que a continuación verás, es sólo para identificar la ecuación a la cual se hace referencia.

Ejemplo

Ejercicio[20]

1) $5x + 6y = 20$
2) $4x - 3y = -23$

[20] (Baldor, 1989)

Pasos:

1. Elige la incógnita que quieres eliminar**, ya sea x o y, da igual**. En este caso supón eliges la x, por tanto, multiplicas la ecuación 1 por el coeficiente de la x de la 2 que es el 4; la ecuación 2 la multiplicas por el coeficiente de la x de la ecuación 1 que es el 5. Además, como los dos coeficientes de x tienen signo positivo, a uno de los dos números hay que multiplicarlo con el signo negativo. Esto último, lo puedes hacer con el coeficiente que tu quieras, en esta ocasión se hará con el primero que será -4. Observa:

$$-4(5x + 6y = 20)$$
$$5(4x - 3y = -23$$

2. Recuerda que **una ecuación es una igualdad (balanza)**, por lo tanto, **hay que multiplicar toda la ecuación con los coeficientes** para que la balanza persista, observa:

$$-4(5x + 6y = 20) \qquad \mathbf{20x - 24y = -80}$$
$$5(4x - 3y = -23 \qquad \mathbf{20x - 15y = -115}$$

3. Después de multiplicar, **simplifica los términos semejantes.**

$$\mathbf{-\cancel{20x} - 24y = -80}$$
$$\underline{\mathbf{\cancel{20x} - 15y = -115}}$$
$$-39y = -195$$ Ecuación lineal con una incógnita

4. Como puedes observar, te queda una ecuación lineal con una incógnita, así que lo que sigue es **despejar la incógnita que te quedó:**

$$-39y = -195$$

$$y = \frac{-195}{-39} \qquad y = 5$$

5. **Sustituyes la incógnita obtenida y resuelves la ecuación lineal que te quedará**. En este caso sustituyes y en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, ya sea en 1 ó 2, en la que tú quieras. En esta ocasión se hará en la 1.

$$1)\ \ 5x + 6y = 20$$
$$5x + 6(5) = 20$$
$$5x + 30 = 20$$
$$5x = 20 - 30$$
$$5x = -10$$
$$x = \frac{-10}{5}$$
$$x = -2$$

6. **Compruebas el sistema.** Para hacer esto sustituyes el valor de las incógnitas en las dos ecuaciones. Si en las dos ecuaciones persiste la igualdad en ambos miembros, quiere decir que el proceso y el resultado es correcto. Observa:

En 1) $\mathbf{5x + 6y = 20}$	**En 2)** $\mathbf{4x - 3y = -23}$
$\mathbf{5(-2) + 6(5) = 20}$	$\mathbf{4(-2) - 3(5) = -23}$
$\mathbf{-10 + 30 = 20}$	$\mathbf{-8 - 15 = -23}$
$\mathbf{20 = 20}$	$\mathbf{-23 = -23}$

Ejemplo

1) $10x + 9y = 8$
2) $8x - 15y = -1$

Pasos:

1. **Elige una de las incógnitas para eliminar,** en esta ocasión **la y**, sólo para que observes que también se puede hacer con esa incógnita. Plantea las multiplicaciones:

$$15(10x + 9y = 8)$$
$$9(8x - 15y = -1)$$

Observa que ninguna de las ecuaciones se va a multiplicar con el signo negativo. Esto es así, debido a que la incógnita y tiene signos contrarios, por lo que no es necesario y no debe hacerse.

2. **Efectúas las multiplicaciones.**

$$15(10x + 9y = 8) \qquad \boldsymbol{150x + 135y = 120}$$
$$9(8x - 15y = -1) \qquad \boldsymbol{72x - 135y = -9}$$

3. **Simplificas términos semejantes.**

$$\begin{array}{r} 150x + 135y = 120 \\ \underline{72x - 135y = -9} \\ \boldsymbol{222x \qquad = 111} \end{array}$$

4. **Resuelves la ecuación obtenida** despejando la incógnita obtenida, en este caso x.

$$\boldsymbol{x = \frac{111}{222} = \frac{1}{2}}$$

5. **Sustituyes la incógnita obtenida** en la ecuación inicial 1 o 2. En esta ocasión se hará en la 2, sólo para que veas que se puede hacer.

$$8x - 15y = -1$$
$$8\left(\frac{1}{2}\right) - 15y = -1$$
$$\frac{8}{2} - 15y = -1$$
$$4 - 15y = -1$$
$$-15y = -1 - 4$$
$$-15y = -5$$
$$y = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$$

6. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1) $10x + 9y = 8$ $10\left(\frac{1}{2}\right) + 9\left(\frac{1}{3}\right) = 8$ $\frac{10}{2} + \frac{9}{3} = 8$ $5 + 3 = 8$ $8 = 8$	**En 2)** $8x - 15y = -1$ $8\left(\frac{1}{2}\right) - 15\left(\frac{1}{3}\right) = -1$ $\frac{8}{2} - \frac{15}{3} = -1$ $4 - 5 = -1$ $-1 = -1$

Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualarlas; esto dará como resultado una ecuación con una sola incógnita, cuya raíz se obtiene al resolverla como ya debes de saber.

Ejemplos

Ejemplo:

1) $7x + 4y = 13$
2) $5x - 2y = 19$

Pasos:

1. **Decide cuál de las dos incógnitas vas a despejar**. La condición es que sea la misma en las dos. Para este ejemplo **se despejará** x **en ambas ecuaciones**. Recuerda que el despeje lo puedes hacer mediante la transposición de los términos, y eso se hace pasando un término al lado contrario del signo igual con la operación contraria.

Despejando x en 1)	Despejando x en 2)
$7x + 4y = 13$ $7x = 13 - 4y$ $x = \frac{13 - 4y}{7}$	$5x - 2y = 19$ $5x = 19 + 2y$ $x = \frac{19 + 2y}{5}$

2. **Igualas las expresiones obtenidas al despejar x en las dos ecuaciones.**

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$$

Como puedes observar, la expresión que te queda es una ecuación lineal con una incógnita.

3. **Resuelves la ecuación lineal usando cualquiera de los métodos que aprendiste.** En este caso, para este tipo de ecuaciones, la manera más sencilla es multiplicar en diagonal, observa:

$$\mathbf{5(13 - 4y) = 7(19 + 2y)}$$
$$65 - 20y = 133 + 14y$$

Después de multiplicar, haces la transposición de términos.

$$-20y - 14y = 133 - 65$$

Luego, simplificas aplicando la ley de los signos de la suma.

$$-34y = 68$$

Despejas y para obtener el valor de esta raíz.

$$y = \frac{68}{-34} \qquad y = -2$$

4. **Sustituyes el valor de la incógnita hallada en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales** para hallar el valor de la otra raíz que es x. Para este ejemplo se hará en la 1).

$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 13 \\ 7x + 4(-2) &= 13 \\ 7x - 8 &= 13 \\ 7x &= 13 + 8 \\ 7x &= 21 \end{aligned}$$

$$x = \frac{21}{7} \qquad x = 3$$

5. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1) $\begin{aligned} 7x + 4y &= 13 \\ 7(3) + 4(-2) &= 13 \\ 21 - 8 &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned}$	**En 2)** $\begin{aligned} 5x - 2y &= 19 \\ 5(3) - 2(-2) &= 19 \\ 15 + 4 &= 19 \\ 19 &= 19 \end{aligned}$

Ejemplo

1) $6x + 2y = -10$
2) $9x + 4y = -24$

Pasos:

1. **Despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.** En este caso se hará con y, con el propósito de que observes que también se puede hacer con ella.

Despejando y en 1) $\begin{aligned} 6x + 2y &= -10 \\ 2y &= -10 - 6x \\ y &= \frac{-10 - 6x}{2} \end{aligned}$	Despejando y en 2) $\begin{aligned} 9x + 4y &= -24 \\ 4y &= -24 - 9x \\ y &= \frac{-24 - 9x}{4} \end{aligned}$

2. **Igualas las expresiones obtenidas.**

$$\frac{-10-6x}{2}=\frac{-24-9x}{4}$$

3. **Resuelves la ecuación.**

$$\begin{gathered}4(-10-6x)=2(-24-9x)\\ -40-24x=-48-18x\\ -24x+18x=-48+40\\ -6x=-8\\ x=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}\end{gathered}$$

4. **Sustituyes el valor obtenido** en cualquiera de las dos ecuaciones, en este caso se hará en la 2), sólo para que observes que también en esta se puede hacer.

$$\begin{gathered}9x+4y=-24\\ 9\left(\frac{4}{3}\right)+4y=-24\\ \frac{36}{3}+4y=-24\\ 12+4y=-24\\ 4y=-24-12\\ \\ 4y=-36\\ y=\frac{-36}{4} \qquad y=-9\end{gathered}$$

5. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1) $6x+2y=-10$ $6\left(\frac{4}{3}\right)+2(-9)=-10$ $\frac{24}{3}-18=-10$ $8-18=-10$ $-10=-10$	**En 2)** $9x+4y=-24$ $9\left(\frac{4}{3}\right)+4(-9)=-24$ $\frac{36}{3}-36=-24$ $12-36=-24$ $-24=-24$

◉ Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas de una de las dos ecuaciones. La expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación para obtener de esta manera una ecuación lineal con una incógnita.

Ejemplo

1. $2x + 5y = -24$
2. $8x - 3y = 19$

Pasos:

1. **Escoge una ecuación, la que tú quieras, y despeja de ella una de las dos incógnitas, también la que tú quieras.** Para este ejemplo se tomará la ecuación 1) y se despejará la x. Observa cómo queda:

$$2x + 5y = -24$$
$$2x = -24 - 5y$$
$$x = \frac{-24-5y}{2}$$

2. **Ahora, procede a sustituir la expresión que se obtuvo al despejar x en la x de la otra ecuación, es decir, en la 2).** Mira como es el proceso.

$$8x - 3y = 19$$

$$8\left(\frac{-24 - 5y}{2}\right) - 3y = 19$$

Como puedes observar, la expresión que te queda es una ecuación lineal con una incógnita.

3. **Resuelves la ecuación lineal con una incógnita.**

Para iniciar, tienes que efectuar las operaciones indicadas (multiplicación de fracciones). Recuerda que para multiplicar fracciones es multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador. Al multiplicar las operaciones indicadas, la ecuación te queda de la siguiente manera:

$$8\left(\frac{-24 - 5y}{2}\right) - 3y = 19$$

$$\frac{-192 - 40y}{2} - 3y = 19$$

Después de multiplicar, para esta ecuación particular, no siempre en todas, puedes resolver de dos maneras para eliminar la división (fracción).

Como los números del numerador de la fracción de la ecuación son divisibles entre dos, pues divide de manera directa. Si no fueran divisibles entre dos tendrías que hacer lo del lado derecho de esta tabla. $\frac{-192}{2} = -96 \qquad \frac{-40y}{2} = -20y$ $-96 - 20y - 3y = 19$	La otra manera es multiplicando toda la ecuación por el denominador, en este caso es 2: $2\left(\frac{-192-40y}{2} - 3y = 19\right)$ $\frac{-384-80y}{2} - 6y = 38$ Ahora, procede a dividir la fracción: $-192 - 40y - 6y = 38$

Ahora lo que sigue es simplificar los términos semejantes y llevar a cabo la transposición de términos para proceder al despeje de la incógnita, en este caso, la y.

Si hiciste lo del lado izquierdo de la tabla anterior, la simplificación, la transposición y despeje de la incógnita te queda de la siguiente manera: $-96 - 20y - 3y = 19$ $23y = 19 + 96$ $-23y = 115$ $y = \frac{115}{-23}$ $y = -5$	Si hiciste lo del lado derecho de la tabla anterior, la simplificación, la transposición y despeje de la incógnita te queda de la siguiente manera: $-192 - 40y - 6y = 38$ $-46y = 38 + 192$ $-46y = 230$ $y = \frac{230}{-46}$ $y = -5$

Como puedes ver, con los dos procesos da lo mismo. Ahora, importante es el hecho de que tienes que considerar que la forma de resolver la división del lado izquierdo es solamente para aquellas divisiones cuyos resultados dan cantidades exactas.

4. **Sustituyes el valor de la incógnita encontrada**, $y = -5$, en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales. Para efectos de este ejemplo se hará en la 1).

$$2x + 5y = -24$$
$$2x + 5(-5) = -24$$
$$2x - 25 = -24$$
$$2x = -24 + 25$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

5. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1)	**En 2)**
$2x + 5y = -24$ $2\left(\frac{1}{2}\right) + 5(-5) = -24$ $\frac{2}{2} - 25 = -24$ $1 - 25 = -24$ $-24 = -24$	$8x - 3y = 19$ $8\left(\frac{1}{2}\right) - 3(-5) = 19$ $\frac{8}{2} + 15 = 19$ $4 + 15 = 19$ $19 = 19$

Ejemplo

1) $2x + 3y = 13$
2) $4x - y = 5$

Pasos:

1) **Escoge una ecuación y despeja una incógnita.** Para este ejemplo, se selecciona la ecuación 2) y de ella se despejará la y. ¿Por qué esa ecuación y porqué la y? La respuesta es para que observes que también se puede hacer de esta manera.

$$4x - y = 5$$
$$-y = 5 - 4x$$

Como la incógnita no puede quedar negativa, multiplica toda la ecuación por el signo menos. Observa:

$$-(-y = 5 - 4x)$$
$$y = -5 + 4x$$

2) **Sustituye la expresión obtenida en la ecuación 1**), que es la que sobró.

$$2x + 3y = 13$$
$$2x + 3(-5 + 4x) = 13$$

Una vez hecha la sustitución, te queda una ecuación lineal con una incógnita.

3) **Resuelve la ecuación lineal con una incógnita.** Esta ecuación, tiene operaciones indicadas, en este caso una multiplicación que tienes que resolver y al hacerlo te quedaría de esta manera:

$$2x + 3(-5 + 4x) = 13$$
$$2x - 15 + 12x = 13$$
$$14x = 13 + 15$$
$$14x = 28$$
$$x = \frac{28}{14}$$
$$x = 2$$

4) **Sustituye el valor obtenido de la incógnita** x en cualquiera de las dos ecuaciones. Para este ejemplo se hará en la ecuación 2).

$$4x - y = 5$$
$$4(2) - y = 5$$
$$8 - y = 5$$
$$-y = 5 - 8$$
$$-y = -3$$

Como no se puede quedar y con signo negativo, multiplica toda la ecuación con el signo negativo. Observa:

$$-(-y = -3)$$
$$y = 3$$

5) Compruebas el sistema sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1)	$2x + 3y = 13$ $2(2) + 3(3) = 13$ $4 + 9 = 13$ $13 = 13$	**En 2)**	$4x - y = 5$ $4(2) - (3) = 5$ $8 - 3 = 5$ $5 = 5$

◉ Método de determinantes[21] o regla de Cramer

La regla de Cramer sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales y esta se basa en los determinantes,

Determinantes de una matriz $2X2$

Una determinante es un número asociado a una matriz cuadrada.

Una matriz de $2X2$ se expresa de la siguiente manera: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

[21] (Baldor,1989)

Para que halles el valor del determinante asociado a ella la obtienes aplicando la siguiente fórmula:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Si observas, el producto (multiplicación) de los elementos a y d, que se encuentran en una diagonal (llamada principal), menos el producto (multiplicación) de los elementos c y b, que se encuentran en la otra diagonal (llamada secundaria), es el valor del determinante.

Mira los siguientes ejemplos:

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = (1)(7) - (-2)(-3) = 7 - 6 = 1$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = (4)(7) - (-3)(1) = 28 + 3 = 31$

Ahora, lee y mira con mucha atención cómo se resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas usando determinantes.

Antes de iniciar, tienes que recordar el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

1) $a_1x+b_1y = c_1$
2) $a_2x+b_2y = c_2$

Ten en cuenta que a_1 representa el coeficiente de la x de la primera ecuación del sistema; b_1 representa el coeficiente de la y también de la primera ecuación del sistema; y c_1, es el término independiente de la primera ecuación.

Los valores $a_{2,}$ b_2 y c_2, prácticamente representan lo mismo sólo que en la ecuación 2.
Por ejemplo, en el siguiente sistema de ecuaciones:

1) $\mathbf{2x + 5y = -24}$
2) $\mathbf{8x - 3y = 19}$

$a_1 = 2$ $b_1 = 5$ $C_1 = -24$ Estos valores se tomaron de los coeficientes de la primera ecuación.
$a_2 = 8$ $b_2 = -3$ $C_2 = 19$ Estos valores se tomaron de los coeficientes de la segunda ecuación.

Considerar el modelo algebraico es importante, debido a que en las fórmulas de las determinantes vas a observar la misma representación.
Mira con mucha atención las siguientes fórmulas, pues son estas determinantes las que necesitas calcular y que te permitirán resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad Dx = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad Dy = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Entonces: $x = \dfrac{Dx}{D}$ $\qquad y = \dfrac{Dy}{D}$ siempre que D $\neq$ 0

Ejemplo

Ejercicio[22]

1) $5x + 3y = 5$
2) $4x + 7y = 27$

Pasos:

1. **Sustituye los valores en cada determinante según la fórmula; recuerda que estos valores son los coeficientes de las incógnitas incluyendo su signo y que encontrarás en las ecuaciones. Esto último es importante.**

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad D_x = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 27 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} \qquad D_y = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 27 \end{bmatrix}$$

2. **Resuelves cada determinante. Al producto de la diagonal principal le restas el producto de la diagonal secundaria.**

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = (5)(7) - (4)(3) = 35 - 12 = 23$$

$$Dx = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 27 & 7 \end{bmatrix} = (5)(7) - (27)(3) = 35 - 81 = -46$$

$$Dy = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 27 \end{bmatrix} = (5)(27) - (4)(5) = 135 - 20 = 115$$

3. **Sustituyes los valores de las determinantes que hallaste en el paso dos, en las fórmulas para hallar el valor de las incógnitas.**

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-46}{23} = -2 \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{115}{23} = 5$$

[22] (Baldor,1989)

4. Compruebas el sistema sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1) $\mathbf{5x+3y=5}$ $\mathbf{5(-2)+3(5)=5}$ $\mathbf{-10+15=5}$ $\mathbf{5=5}$	**En 2)** $\mathbf{4x+7y=27}$ $\mathbf{4(-2)+7(5)=27}$ $\mathbf{-8+35=27}$ $\mathbf{27=27}$

Ejemplo

1) $9x+8y=12$
2) $24x-60y=-29$

Pasos:

1. **Sustituyes los valores de los coeficientes de las ecuaciones en las determinantes. Recuerda, tienes que considerar el signo también.**

$D=\begin{bmatrix}9 & 8\\ 24 & -60\end{bmatrix}$ $D_x=\begin{bmatrix}12 & 8\\ -29 & -60\end{bmatrix}$ $D_y=\begin{bmatrix}9 & 12\\ 24 & -29\end{bmatrix}$

2. **Resuelves cada determinante. Al producto de la diagonal principal le restas el producto de la diagonal secundaria.**

$$D=\begin{bmatrix}9 & 8\\ 24 & -60\end{bmatrix}=(9)(-60)-(24)(8)=-540-192=-732$$

$$Dx=\begin{bmatrix}12 & 8\\ -29 & -60\end{bmatrix}=(12)(-60)-(-29)(8)=-720+232=-488$$

$$Dy=\begin{bmatrix}9 & 12\\ 24 & -29\end{bmatrix}=(9)(-29)-(24)(12)=-261-288=-549$$

3. **Sustituyes los valores de las determinantes que hallaste en el paso dos, en las fórmulas para hallar el valor de las incógnitas.**

$x=\frac{Dx}{D}=\frac{-488}{-732}=\frac{2}{3}$ $y=\frac{Dy}{D}=\frac{-549}{-732}=\frac{3}{4}$

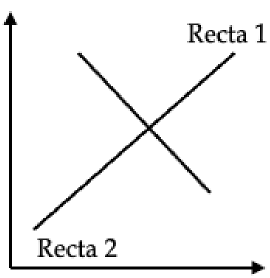
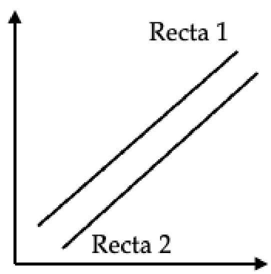
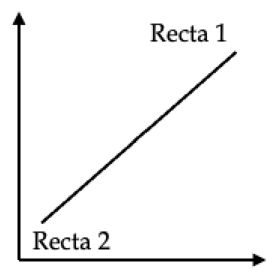
4. Compruebas el sistema sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1) $$\begin{gathered} 9x+8y=12 \\ 9\left(\frac{2}{3}\right)+8\left(\frac{3}{4}\right)=12 \\ \frac{18}{3}+\frac{24}{4}=12 \\ 6+6=12 \\ 12=12 \end{gathered}$$	**En 2)** $$\begin{gathered} 24x-60y=-29 \\ 24\left(\frac{2}{3}\right)-60\left(\frac{3}{4}\right)=-29 \\ \frac{48}{3}-\frac{180}{4}=-29 \\ 16-45=-29 \\ -29=-29 \end{gathered}$$

Método gráfico[23]

La representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas en el plano coordenado es una línea recta.

Como cada ecuación lineal es una recta, entonces un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representado gráficamente, consiste en un par de rectas.
Si pretendes solucionar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante el método gráfico, se te pueden presentar tres casos:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Las rectas se intersecan solamente en un punto, por lo tanto, el sistema de ecuaciones solamente tiene una solución.</td>
<td>Las rectas quedan paralelas, por lo que por más que se prolonguen, jamás se tocarán.
En este caso, el sistema de ecuaciones no tiene solución.</td>
<td>Las rectas 1 pasa en el mismo lugar por donde pasa la recta 2, es decir, coinciden exactamente en todos los puntos.
Cuando esto sucede, el sistema de ecuaciones tiene soluciones infinitas.</td>
</tr>
</table>

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, existen varios métodos. Observa el cuadro sinóptico:

[23] (Baldor, 1989)

Métodos para graficar rectas
- tabulador
- Intersección con los ejes
- Pendiente-ordenada al origen

En esta ocasión, se usará el método del tabulador usando solamente dos puntos, aunque se puede hacer con n puntos.
Ahora sí, presta atención a cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas gráficamente.

Ejemplo

1) $x + y = 6$
2) $5x - 4y = 12$

Pasos:

1. **Despejas y en ambas ecuaciones.** Aquí, es necesario que sea la y, nunca la x.

En 1) $x + y = 6$ $y = 6 - x$ Ordenando la ecuación: $y = -x + 6$	En 2) $5x - 4y = 12$ $-4y = 12 - 5x$ $y = \frac{12 - 5x}{-4}$ $y = -3 + \frac{5}{4}x$ Ordenando la ecuación. $y = \frac{5}{4}x - 3$

2. **Armas un tabulador por cada ecuación y solamente tomarás dos valores para x, no necesitas más. Los valores para x serán los que tú quieras.**

<table>
<tr>
<td>Para 1)

Para este ejemplo, le pondré a la x valores 2 $y - 3$.

<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>-3</td><td></td></tr></table>
</td>
<td>Para 2)

Para este ejemplo, le pondré a la x valores 3 $y - 1$. Este cambio de valores en relación a los que se usaron en la ecuación 1), es solamente para que observes que se puede hacer con cualquier número que tu elijas.
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>-1</td><td></td></tr></table>
</td>
</tr>
</table>

3. **Ahora, sustituye los valores de x que elegiste para hallar los valores de y, en las ecuaciones donde despejaste las y.** Observa:

Para 1)	Para 2)
$y = -x + 6$ $\boldsymbol{y = -(2) + 6 = -2 + 6 = 4}$ $\boldsymbol{y = -(-3) + 6 = 3 + 6 = 9}$	$y = \frac{5}{4}x - 3$ $y = \frac{5}{4}(3) - 3 = \frac{15}{4} - 3 = 0.75$ $y = \frac{5}{4}(-1) - 3 = \frac{-5}{4} - 3 = -4.25$

4. **Completa el tabulador correspondiente a cada ecuación con los valores encontrados de las y.**

Para 1)

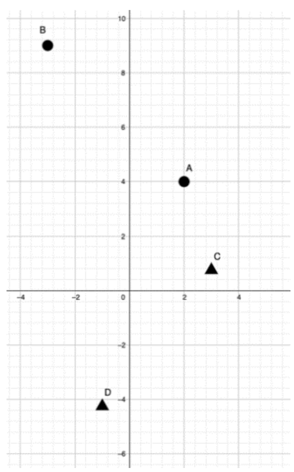
x	y
2	4
-3	9

Para 2)

x	y
3	0.75
-1	-4.25

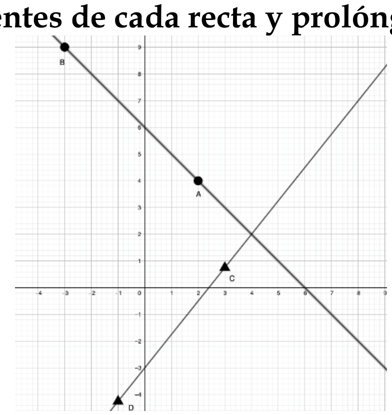
5. **Ubicas los puntos en el plano coordenado.**

Puntos A y B de la recta 1



Puntos C y D de la recta 2

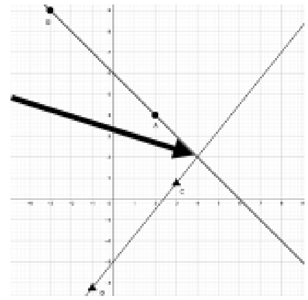
6. **Une los puntos correspondientes de cada recta y prolóngalos hasta que se toquen.**



7. **Ubica la coordenada donde las rectas se tocan.** La solución del sistema la vas a encontrar en los valores de la coordenada.

Punto de intersección
(4, 2)

Por tanto: $x = 4$ y $y = 2$



8. Compruebas el sistema sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En 1) $\boldsymbol{x + y = 6}$ $\boldsymbol{4 + 2 = 6}$ $\boldsymbol{6 = 6}$	**En 2)** $\boldsymbol{5x - 4y = 12}$ $\boldsymbol{5(4) - 4(2) = 12}$ $\boldsymbol{20 - 8 = 12}$ $\boldsymbol{12 = 12}$

Ejemplo

1) $x - 2y = 6$
2) $2x - 4y = 5$

1. **Despeja las y de ambas ecuaciones.**

En 1) $x - 2y = 6$ $-2y = 6 - x$ $y = \frac{6 - x}{-2}$ $y = -3 + \frac{1}{2}x$ Ordenándola ecuación: $y = \frac{1}{2}x - 3$	En 2) $2x - 4y = 5$ $-4y = 5 - 2x$ $y = \frac{5 - 2x}{-4}$ $y = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x$ Ordenando la ecuación. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

2. **Armas un tabulador por cada ecuación solamente con dos valores para x.**

Para 1)	Para 2)
Para este ejemplo, le pondré a la x valores $1\ y\ 2$. x: 1, 2; y: (vacío)	Para este ejemplo, le pondré a la x valores $1\ y\ 2$. x: 1, 2; y: (vacío)

x	y
1	
2	

3. **Ahora, sustituye los valores de x que elegiste para hallar los valores de y, en las ecuaciones donde despejaste las y.** Observa:

Para 1)

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$
$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}(1) - 3 = \frac{1}{2} - 3 = -2.5}$$
$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}(2) - 3 = \frac{2}{2} - 3 = -2}$$

Para 2)

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$
$$y = \frac{1}{2}(1) - \frac{5}{4} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -0.75$$
$$y = \frac{1}{2}(2) - \frac{5}{4} = \frac{2}{2} - \frac{5}{4} = -0.25$$

4. **Completa el tabulador correspondiente a cada ecuación con los valores encontrados de las y.**

Para 1)

Para este ejemplo, le pondré a la x valores $1\ y\ 2$.

x	y
1	-2.5
2	-2

Para 2)

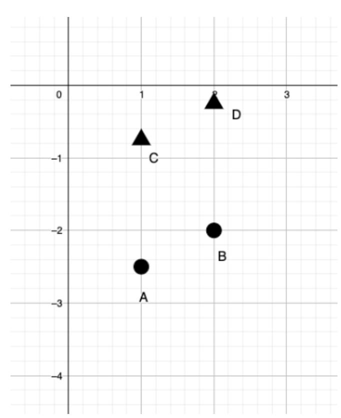
Para este ejemplo, le pondré a la x valores $1\ y\ 2$.

x	y
1	-0.75
2	-0.25

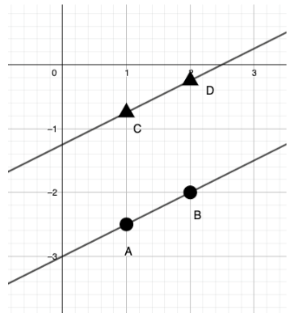
5. **Ubicas los puntos en el plano coordenado.**

Puntos C y D de la recta 2)

Puntos A y B de la recta 1)



6. **Une los puntos correspondientes de cada recta y prolóngalos hasta que se toquen.**



7. **Ubica la coordenada donde las rectas se tocan.** En este caso, quedan dos rectas paralelas, lo que quiere decir que por más que las prolongues jamás se van a tocar. Por tanto, **este sistema no tiene solución.**

- ## Situaciones donde se aplica el sistema de 2 x 2

Analiza el siguiente problema[24]:

Adriana compra en la papelería El navío, una pluma y un lápiz y pagó $ 3.00. Ana compra tres plumas y dos lápices y pagó $ 7.00 ¿Cuál es el costo de la pluma y del lápiz?

Datos:

Sea el costo de la pluma: x
Sea el costo del lápiz: y
Adriana: compró 1 pluma y 1 lápiz. Pagó por su compra: $ 3.00
Ana: compró 3 plumas y 2 lápices. Pagó por su compra: $ 7.00

Con estos datos se puede formar el sistema de 2 x 2. Observa:

1) $x + y = 3$
2) $3x + 2y = 7$

Para resolver el sistema de ecuaciones, puedes aplicar cualquiera de los métodos que aprendiste anteriormente: suma y resta, sustitución, igualación, determinantes o gráfico. En este sistema se resolverá con el método de suma y resta. Mira con atención el proceso:

[24] (Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, 2011)

1. **Elige la incógnita que vas a eliminar** y multiplica la ecuación 1) con el coeficiente numérico de la incógnita de la ecuación 2). A la ecuación 2), deberás multiplicarla con el coeficiente numérico de la incógnita a eliminar de la ecuación 1)**. Recuerda también considerar que, si los dos coeficientes de la incógnita a eliminar son del mismo signo,** hay que multiplicar una de las ecuaciones con el signo negativo. En este sistema, se procederá a eliminar la incógnita x.

1) $x + y = 3$	$-3(x + y = 3)$	$-3x - 3y = -9$
2) $3x + 2y = 7$	$1(3x + 2y = 7)$	$3x + 2y = 7$

2. **Simplifica los términos semejantes del sistema que quedó y despeja la incógnita.**

$$\begin{array}{r} -3x - 3y = -9 \\ \underline{3x + 2y = 7} \\ \boldsymbol{-y = -2} \\ -(-y = -2) \\ y = 2 \end{array}$$

3. **Sustituye el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, 1) ó 2).** En esta ocasión se hará en 1)

$$\begin{array}{c} 1)\ x + y = 3 \\ x + (2) = 3 \\ \\ x + 2 = 3 \\ x = 3 - 2 \\ x = 1 \end{array}$$

4. **Comprueba si lo que hiciste es correcto.**

En 1) $x + y = 3$ $1 + 2 = 3$ $3 = 3$	En 2) $3x + 2y = 7$ $3(1) + 2(2) = 7$ $3 + 4 = 7$ $7 = 7$

Como da la igualdad en ambas ecuaciones, todo lo realizado es correcto.

5. **Responde a la pregunta del problema:** ¿Cuál es el costo de una pluma y de un lápiz?

En el planteamiento del problema,
x =pluma, Por tanto, una pluma cuesta $ 1.00
y= lápiz Así que un lápiz cuesta $ 2.00

Actividad 4.2

Instrucciones

1. En hojas de libreta o blancas, resuelve las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita.
2. Puedes usar cualquiera de los métodos abordados en este material.
3. Cuida el orden, la limpieza y legibilidad en tu trabajo.
4. Usa colores en el cuerpo del trabajo.

Ejercicios[25][26]:

I. Resuelve los siguientes sistemas, usando cualquiera de los métodos algebraicos.

1. $x + 6y = 27$
   $7x - 3y = 9$

2. $3x - 2y = -2$
   $5x + 8y = -60$

3. $3x + 5y = 7$
   $2x - y = -4$

II. Resuelve los siguientes sistemas por determinantes.

4. $7x + 8y = 29$
   $5x + 11y = 26$

5. $3x - 4y = 13$
   $8x - 5y = -5$

III. Resuelve los siguientes sistemas por el método gráfico.

6. $\boldsymbol{x} - y = 1$
   $x + y = 7$

7. $x - 2y = 10$
   $2x + 3y = -8$

IV. Usando el método que tú prefieras, resuelve los siguientes problemas.

8. Un docente, deja a resolver 16 problemas a un alumno. Por cada problema que resuelva correctamente le dará 5 puntos, y por cada problema que no resuelva correctamente, perderá 3 puntos. ¿cuántos problemas resolvió correctamente si recibió 48 puntos?
9. En una fábrica, hay dos máquinas que trabajan juntas 28 horas. Si una de ellas trabaja 4 horas más que la otra, ¿cuántas horas funciona cada una?
10. Don José compró 4 vacas y 7 caballos por $ 614; más tarde, a los mismos precios, compró 8 vacas y 9 caballos por $ 818. Halla el costo de una vaca y de un caballo.

Evaluación

- Esta actividad, se evaluará con la rúbrica 4.2, que encontrarás en el apartado "Instrumentos para evaluación".

[25] (Baldor, 1989)
[26] (Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, 2011)

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas de forma colaborativa mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Sistema de ecuaciones lineales con tres variables.

Lectura previa[27]

Una ecuación lineal de tres incógnitas se representa de esta manera:
$ax + by + cz = d$,
en donde x, y, z son las incógnitas y a, b, c y d son números reales (coeficientes numéricos).

El modelo algebraico de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se representa de la siguiente manera:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Si los valores x, y y z satisfacen simultáneamente a las tres ecuaciones anteriores, entonces ellos son la solución del sistema.
De la misma manera del sistema 2 x 2, en el sistema $3x3$ también se puede presentar la solución única, infinidad de soluciones o ninguna solución.

A continuación, se te explicará cómo resolver un sistema de ecuaciones de 3 x 3 por métodos algebraicos (suma y resta y sustitución) y numéricos (determinantes).

⦿ Método de suma y resta, reducción o de Gauss

Este método se basa en hacer iguales los coeficientes de una de las incógnitas sólo que con signo contrario con el propósito de eliminarla. Mencionado esto, es el mismo proceso que seguiste en el sistema de 2 x 2.

Ejemplo

1) $x + y + z = 4$
2) $2x - 3y + 5z = -5$
3) $3x + 4y + 7z = 10$

[27] (Baldor, 1989)

Recuerda que la función de los números 1), 2) y 3), simplemente es de identificación.

Pasos:

1. **Escoge dos ecuaciones, las que tú quieras y escoge la incógnita que vas a eliminar, también, la que tú quieras**. En este ejemplo se tomará la ecuación 1) y 2) para eliminar en ellas la incógnita x.

1) $x + y + z = 4$
2) $2x - 3y + 5z = -5$

Para que elimines la incógnita x, recuerda que simplemente necesitas multiplicar toda la ecuación 1) por el coeficiente de la x de la ecuación 2); y multiplicar toda la ecuación 2) por el coeficiente de la incógnita x de la ecuación 1).
También recuerda que, si los signos de la incógnita que quieres eliminar son iguales, deberás multiplicar una de las ecuaciones con el signo negativo. En este caso se hará en la primera ecuación. Mira con atención lo que sigue:

1) $-2(x + y + z = 4)$ $\qquad -2x - 2y - 2z = -8$
2) $1(2x - 3y + 5z = -5)$ $\qquad \underline{2x - 3y + 5z = -5}$
4) $-5y + 3z = -13$

Al simplificar las ecuaciones, te queda una ecuación lineal con dos incógnitas, a la cual le llamarás 4) para identificarla.

2. **Ahora, vas a tomar la ecuación que se desechó al principio y la vas a combinar con cualquiera de las otras dos, es decir, ya sea con 1) o con 2) (la que tú quieras), para eliminar la misma incógnita que se eliminó en el paso 1.** Para este ejemplo tendrás que combinar la 3) con la 1) y eliminar la incógnita x, multiplicando las dos ecuaciones con los coeficientes contrarios de la x. Como los dos coeficientes son positivos, multiplicarás la ecuación 1) con el signo negativo.

3) $3x + 4y + 7z = 10$ $\qquad 1(3x + 4y + 7z = 10)$ $\qquad 3x + 4y + 7z = 10$
1) $x + y + z = 4$ $\qquad -3(x + y + z = 4)$ $\qquad \underline{-3x - 3y - 3z = -12}$
5) $y + 4z = -2$

Al simplificar las ecuaciones, te queda una ecuación lineal con dos incógnitas, a la cual llamarás 5) para identificarla.

3. **Lo que sigue, es combinar las ecuaciones 4) y 5) que obtuviste en el paso 1 y 2, con el objetivo de eliminar una de las incógnitas, que puede ser cualquiera.** En este caso se eliminará la y. Como los coeficientes ya tienen signo contrario no es necesario que multipliques a una de las ecuaciones con el signo negativo.

4) $-5y + 3z = -13$ $\qquad 1(-5y + 3z = -13)$ $\qquad -5y + 3z = -13$
5) $y + 4z = -2$ $\qquad 5(y + 4z = -2)$ $\qquad \underline{5y + 20z = -10}$
$\mathbf{23z = -23}$

Cuando simplificas la ecuación, te queda una ecuación lineal con una incógnita. Lo único que tienes que hacer es despejar la z.

$$z = \frac{23}{-23} \qquad z = -1$$

De esta manera ya tienes una de las tres incógnitas.

4. **Sustituyes el valor de la incógnita encontrada en la ecuación 4) ó 5)**, la que tú quieras, para encontrar una de las dos incógnitas que te faltan. Observa cómo se hace la sustitución de $z = -1$ si tomas la ecuación 4).

4) $$-5y + 3z = -13$$
$$-5y + 3(-1) = -13$$
$$-5y - 3 = -13$$
$$-5y = -13 + 3$$
$$-5y = -10$$
$$y = \frac{-10}{-5} \qquad y = 2$$

De esta manera ya conoces el valor dos de las tres incógnitas.

5. **Sustituyes el valor de las dos incógnitas halladas en cualquiera de las tres ecuaciones iniciales, es decir, en 1), 2) ó 3)**. Para este caso, observa cómo te debe quedar si lo haces en la 1)

1) $$x + y + z = 4$$
$$x + (2) + (-1) = 4$$
$$x + 2 - 1 = 4$$
$$x = 4 - 2 + 1$$
$$x = 3$$

Así, con este paso obtienes el valor de la última incógnita que satisface al sistema de ecuaciones.

6. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En la 1) $x + y + z = 4$ $(3) + (2) + (-1) = 4$ $3 + 2 - 1 = 4$ $4 = 4$	En la 2) $2x - 3y + 5z = -5$ $2(3) - 3(2) + 5(-1) = -5$ $6 - 6 - 5 = -5$ $-5 = -5$	En la 3) $3x + 4y + 7z = 10$ $3(3) + 4(2) + 7(-1) = 10$ $9 + 8 - 7 = 10$ $10 = 10$

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas de una de las tres ecuaciones. La expresión obtenida se sustituye en las otras dos ecuaciones del sistema para obtener de esta manera una ecuación lineal con una incógnita.

Ejemplo

1) $x + y + z = 4$
2) $2x - 3y + 5z = -5$
3) $3x + 4y + 7z = 10$

Pasos:

1. **Escoge una de las tres ecuaciones, la que tú quieras, y escoge despejar una de las tres incógnitas.** Para este ejemplo, observa cómo te queda si escoges la 1) y despejas x de ella.

   1) $x + y + z = 4$ $\qquad$ $x = 4 - y - z$

2. **Sustituyes la expresión obtenida al despejar x en las otras dos ecuaciones, es decir, en la 2) y en la 3).** Mira cómo te debe de quedar.

2) $2x - 3y + 5z = -5$ $\qquad$ $2(4 - y - z) - 3y + 5z = -5$
3) $3x + 4y + 7z = 10$ $\qquad$ $3(4 - y - z) + 4y + 7z = 10$

3. **Resuelves las operaciones indicadas en las ecuaciones que te quedaron y luego simplificas los términos semejantes.** Observa el proceso seguido de izquierda a derecha.

$8 - 2y - 2z - 3y + 5z = -5$ $\qquad$ $8 - 5y + 3z = -5$ $\qquad$ $-5y + 3z = -5 - 8$
$12 - 3y - 3z + 4y + 7z = 10$ $\qquad$ $12 + y + 4z = 10$ $\qquad$ $y + 4z = 10 - 12$

4) $-5y + 3z = -13$
5) $y + 4z = -2$

Al hacer la transposición y simplificar, lo que te queda es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a las que llamarás 4) y 5).

4. **Escoges una ecuación entre 4) y 5), y despejas una de las incógnitas.** Para este ejemplo, observa cómo te queda si escoges la ecuación 5) y despejas de ella la y.
   5) $y + 4z = -2$ $\qquad$ $y = -2 - 4z$

5. **La expresión obtenida, la sustituyes en la ecuación que desechaste del paso 4, es decir, en la 4).** Mira cómo te debe de quedar.

   4) $-5y + 3z = -13$
   $-5(-2 - 4z) + 3z = -13$

Resuelve las operaciones indicadas, en este caso es una multiplicación, para luego simplificar y despejar la incógnita que te quede y así obtener el valor de ella.

$$10 + 20z + 3z = -13$$
$$23z = -13 - 10$$
$$23z = -23$$
$$z = \frac{-23}{23} \qquad z = -1$$

6. **Sustituye el valor de la incógnita encontrada en la ecuación 4) ó 5).** En esta ocasión se hará en la 4)

4) $-5y + 3z = -13$

$$-5y + 3(-1) = -13$$
$$-5y - 3 = -13$$
$$-5y = -13 + 3$$
$$-5y = -10$$

$$y = \frac{-10}{-5} \qquad y = 2$$

7. **Sustituye los dos valores de las incógnitas encontradas en cualquieras de las tres ecuaciones iniciales, ya sea en 1), 2) ó 3.** En esta ocasión se hará en la 2).

2) $2x - 3y + 5z = -5$

$$2x - 3(2) + 5(-1) = -5$$
$$2x - 6 - 5 = -5$$
$$2x = -5 + 6 + 5$$
$$2x = 6$$
$$x = \frac{6}{2} \qquad x = 3$$

8. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En la 1) $x + y + z = 4$ $(3) + (2) + (-1) = 4$ $3 + 2 - 1 = 4$ $4 = 4$	En la 2) $2x - 3y + 5z = -5$ $2(3) - 3(2) + 5(-1) = -5$ $6 - 6 - 5 = -5$ $-5 = -5$	En la 3) $3x + 4y + 7z = 10$ $3(3) + 4(2) + 7(-1) = 10$ $9 + 8 - 7 = 10$ $10 = 10$

◉ Método de determinantes

Una determinante de 3 x 3 está formada por tres renglones y tres columnas.
El modo más sencillo de hallar el valor de una determinante de tercer orden es aplicando la regla de Sarrus.

Ejemplo

1. Resolver $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ por la regla de Sarrus

Para obtener el valor de la determinante:

1. Debajo de la tercera fila horizontal, vuelve a escribir las dos primeras filas horizontales. Observa cómo queda.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Traza tres diagonales de izquierda a derecha, empezando por el primer número de la primera fila; luego traza tres diagonales de derecha a izquierda, empezando con el tercer número de la primera fila. Mira cómo queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Ahora, multiplica entre sí, los tres números por los que pasa cada diagonal de izquierda a derecha y luego los sumas. Observa:

$$(1)(2)(3) + (-4)(-1)(-3) + (5)(-2)(1) = 6 + (-12) + (-10) = 6 - 12 - 10 = -16$$

4. Haz lo mismo con las diagonales de derecha a izquierda:
$$(-3)(2)(5) + (1)(-1)(1) + (3)(-2)(-4) = (-30) + (-1) + (24) = -30 - 1 + 24 = -7$$

5. Para terminar, al primer resultado réstale el segundo resultado.

$$(-16) - (-7) = -16 + 7 = -9$$

De esta manera, -9 es el valor de la determinante.

Una vez que ya sabes cómo obtener el valor de una determinante, vamos a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de determinantes.

Antes de iniciar, tienes que recordar el modelo algebraico de un sistema de 3 x 3, para que luego seas capaz de identificar los valores que vas a sustituir en las fórmulas.

◉ Modelo algebraico

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Recuerda que las letras a, b, d y d, representan los coeficientes de las incógnitas; la a para la x, la b para la y, la c para la z y la d para el término independiente. Los números 1, 2 y 3, es para identificar la ecuación a la que pertenece.

A continuación, se te presentan las fórmulas de las determinantes que te servirán para obtener los valores de las incógnitas.

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad Dx = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad Dy = \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad Dz = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Los valores de las incógnitas están dados por las expresiones:

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D} \qquad z = \frac{Dz}{D}$$

Ejemplo

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

1) $x + y + z = 4$
2) $2x - 3y + 5z = -5$
3) $3x + 4y + 7z = 10$

Pasos:

1. **Sustituye los valores de los coeficientes en cada determinante según la fórmula y obtén el valor de cada una de ellas**. Es importante incluir los signos negativos de los coeficientes en las determinantes, observa:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} = (-21 + 8 + 15) - (-9 + 20 + 14) = (2) - (25) = 2 - 25 = -23$$

$$Dx = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} Dx = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \end{bmatrix} = (-84 - 20 + 50) - (-30 + 80 - 35) = (-54) - (15) =$$

$$= -54 - 15 = -69$$

$$Dy = \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{bmatrix} \; Dy = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix} = (-35+20+60)-(-15+50+56) = (45)-(91) =$$

$$= 45 - 91 = -46$$

$$Dz = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{bmatrix} \; Dz = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix} = (-30+32-15)-(-36-20+20) = (-13)-(-36) =$$

$$= -13 + 36 = 23$$

2. **Sustituye los valores encontrados de las determinantes según las siguientes fórmulas.**

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad x = \frac{-69}{-23} \qquad x = 3$$

$$y = \frac{Dy}{D} \qquad y = \frac{-46}{-23} \qquad y = 2$$

$$z = \frac{Dz}{D} \qquad z = \frac{23}{-23} \qquad z = -1$$

3. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En la 1) $x + y + z = 4$ $(3) + (2) + (-1) = 4$ $3 + 2 - 1 = 4$ $4 = 4$	En la 2) $2x - 3y + 5z = -5$ $2(3) - 3(2) + 5(-1) = -5$ $6 - 6 - 5 = -5$ $-5 = -5$	En la 3) $3x + 4y + 7z = 10$ $3(3) + 4(2) + 7(-1) = 10$ $9 + 8 - 7 = 10$ $10 = 10$

Ejemplo

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

1) $2x + y - 3z = 12$
2) $5x - 4y + 7z = 27$
3) $10x + 3y - z = 40$

Pasos:

1. **Sustituye los valores de los coeficientes en cada determinante según la fórmula y obtén el valor de cada una de ellas**. Es importante incluir los signos negativos de los coeficientes en las determinantes, observa:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} = (8 - 45 + 70) - (120 + 42 - 5) = (17) - (157) =$$

$$= 33 - 157 = -124$$

$$Dx = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad Dx = \begin{bmatrix} 12 & 1 & -3 \\ 27 & -4 & 7 \\ 40 & 3 & -1 \\ 12 & 1 & -3 \\ 27 & -4 & 7 \end{bmatrix} = (48 - 243 + 280) - (480 + 252 - 27) = (85) - (705) =$$

$$= 85 - 705 = -620$$

$$Dy = \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad Dy = \begin{bmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 5 & 27 & 7 \\ 10 & 40 & -1 \\ 2 & 12 & -3 \\ 5 & 27 & 7 \end{bmatrix} = (-54 - 600 + 840) - (-810 + 560 - 60) =$$

$$= (186) - (-310) = 186 + 310 = 496$$

$$Dz = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad Dz = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 5 & -4 & 27 \\ 10 & 3 & 40 \\ 2 & 1 & 12 \\ 5 & -4 & 27 \end{bmatrix} = (-320 + 180 + 270) - (-480 + 162 + 200) =$$

$$= (130) - (-118) = 130 + 118 = 248$$

2. **Sustituye los valores encontrados de las determinantes según las siguientes fórmulas.**

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad x = \frac{-620}{-124} \qquad x = 5$$

$$y = \frac{Dy}{D} \qquad y = \frac{496}{-124} \qquad y = -4$$

$$z = \frac{Dz}{D} \qquad z = \frac{248}{-124} \qquad z = -2$$

3. **Compruebas el sistema** sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En la 1) $2x + y - 3z = 12$	En la 2) $5x - 4y + 7z = 27$	En la 3) $10x + 3y - z = 40$
$2(5) + (-4) - 3(-2) = 12$	$5(5) - 4(-4) + 7(-2) = 27$	$10(5) + 3(-4) - (-2) = 40$
$10 - 4 + 6 = 12$	$25 + 16 - 14 = 27$	$50 - 12 + 2 = 40$
$12 = 12$	$27 = 27$	$40 = 40$

⦿ Situaciones donde se aplica el sistema de 3 x 3

Analiza el siguiente problema:

En cierta fábrica de artículos eléctricos se detectó que después de años de uso, las máquinas producían algunos artículos defectuosos que reportarían pérdidas. Se realizó una inspección en tres días y se encontró lo siguiente: El primer día la máquina A produjo 20 artículos; la máquina B, 10 y la máquina C, 30. Ese día la ganancia promedio por producto fue de $ 70. El segundo día la máquina A produjo 10 artículos; la B, 20 y la C, 20. La ganancia promedio de ese día fue de $ 10 por producto. El tercer día la máquina A produjo 10 artículos; la B, 20 y la C, 50. La pérdida promedio reportada ese día fue de $ 30 por producto. ¿Cuál de las tres máquinas habría que cambiar?

Datos:
Máquina A=a
Máquina B=b
Máquina C=c
Ganancia promedio primer día de inspección= $ 70 por producto
Ganancia promedio total primer día (todas las máquinas) =$ 70 (20+10+30)= $ 70(60)=$ 4, 200
Ganancia promedio segundo día de inspección= $ 10 por producto
Ganancia promedio total segundo día (todas las máquinas) =$ 10 (10+20+20)= $ 10(50)=$ 500
Pérdida promedio tercer día de inspección= $ 30 por producto
Pérdida promedio total tercer día (todas las máquinas) =$ -30 (10+20+50)= $ -30(80)=$ -2, 400

Con estos datos, observa cómo se forma el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$1)\ 20a + 10b + 30c = 4200$$
$$2)\ 10a + 20b + 20c = 500$$
$$3)\ 10a + 20b + 50c = -2400$$

Este sistema, lo puedes resolver con cualquiera de los métodos explicados anteriormente, suma y resta, sustitución o determinantes. En esta ocasión, observa cómo se hace **usando el método de sustitución**.

1. **Tomas la ecuación 2) y se despeja la incógnita a.**

$$\textbf{2)} \qquad 10a + 20b + 20c = 500$$
$$10a = 500 - 20b - 20c$$
$$a = \frac{500 - 20b - 20c}{10}$$

Como los coeficientes numéricos del numerador son divisibles entre el denominador, se efectúa la división (polinomio entre monomio):

$$a = 50 - 2b - 2c$$

2. **Sustituyes la expresión obtenida al despejar a en la ecuación 1) y 3), es decir, las que te sobraron del paso 1.**

En *1*:

$$\textbf{1)} \quad 20a + 10b + 30c = 4200$$
$$20(50 - 2b - 2c) + 10b + 30c = 4200$$
$$1000 - 40b - 40c + 10b + 30c = 4200$$
$$-30b - 10c = 4200 - 1000$$
$$\textbf{4)} \qquad -30b - 10c = 3200$$

En *3:*

$$\textbf{3)} \qquad 10a + 20b + 50c = -2400$$
$$10(50 - 2b - 2c) + 20b + 50c = -2400$$
$$500 - 20b - 20c + 20b + 50c = -2400$$
$$30c = -2400 - 500$$
$$30c = -2900$$

Al simplificar, te queda una ecuación lineal con una incógnita en donde puedes despejar la c:

$$c = \frac{-2900}{30} = -\frac{290}{3}$$

3. Sustituye el valor de *c* en la ecuación 4 para encontrar el valor de *b*:

$$-30b - 10\left(\frac{-290}{3}\right) = 3200$$

$$-30b + \frac{2900}{3} = 3200$$

$$-30b = 3200 - \frac{2900}{3}$$

$$-30b = \frac{6700}{3}$$

$$b = \frac{\frac{6700}{3}}{-30}$$

$$b = \frac{6700}{-90} = -\frac{670}{9}$$

4. Sustituye *b* y *c* en cualquiera de las tres ecuaciones iniciales.
Si lo haces en 1) mira cómo te queda:

$$1)\quad 20a + 10b + 30c = 4200$$

$$20a + 10\left(-\frac{670}{9}\right) + 30\left(-\frac{290}{3}\right) = 4200$$

$$20a - \frac{6700}{9} - \frac{8700}{3} = 4200$$

$$20a = 4200 + \frac{6700}{9} + \frac{8700}{3}$$

$$20a = \frac{70600}{9}$$

$$a = \frac{\frac{70600}{9}}{20}$$

$$a = \frac{70600}{180}$$

$$a = \frac{3530}{9}$$

5. Compruebas el sistema sustituyendo los valores encontrados de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema.

En la 1)	En la 2)	En la 3)
$20a + 10b + 30c = 4200$ $20\left(\frac{3530}{9}\right) + 10\left(-\frac{670}{9}\right) +$ $30\left(-\frac{290}{3}\right) = 4200$ $\frac{70600}{9} - \frac{6700}{9} - \frac{8700}{3}$ $= 4200$ $4200 = 4200$	$10a + 20b + 20c = 500$ $10\left(\frac{3530}{9}\right) + 20\left(-\frac{670}{9}\right) +$ $20\left(-\frac{290}{3}\right) = 500$ $\frac{35300}{9} - \frac{13400}{9} - \frac{5800}{3}$ $= 500$ $500 = 500$	$10a+20b + 50c = -2400$ $10\left(\frac{3530}{9}\right) + 20\left(-\frac{670}{9}\right) +$ $50\left(-\frac{290}{3}\right) = -2400$ $\frac{35300}{9} - \frac{13400}{9} - \frac{14500}{3}$ $= -2400$ $-2400 = -2400$

6. Respondes la pregunta del problema.

Ya que sabes que el proceso y resultados del sistema son correctos, analiza los resultados.

$$a = \frac{3530}{9} = 392.22 \qquad b = -\frac{670}{9} = -74.44 \qquad c = -\frac{290}{3} = -96.66$$

Como puedes observar, la máquina que está produciendo las mayores pérdidas es la C, por tanto, es la que habría de cambiarse.

Actividad 4.3

Instrucciones

1. En hojas de libreta o blancas, resuelve las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita.
2. Puedes usar cualquiera de los métodos abordados en este material.
3. Cuida el orden, la limpieza y legibilidad en tu trabajo.
4. Usa colores en el cuerpo del trabajo.

Ejercicios[28][29]:

I. Usando cualquier método algebraico, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $x + y + z = 6$
   $x - y + 2z = 5$
   $x - y - 3z = -10$

2. $x + y + z = 12$
   $2x - y + z = 7$
   $x + 2y - z = 6$

II. Usando determinantes, resuelve los siguientes sistemas.

3. $x - y + z = 2$
   $x + y + z = 4$
   $2x + 2y - z = -4$

4. $2x + y - 3z = -1$
   $x - 3y - 2z = -12$
   $3x - 2y - z = -5$

III. Usando el método que prefieras, resuelve los siguientes problemas.

5. Lucía, que acaba de regresar de sus vacaciones, gastó en hotel: $ 500 diarios en Veracruz, $ 200 diarios en Tabasco y $ 700 diarios en Cancún. En comida gastó: $ 400 diarios en Veracruz, $ 600 diarios en Tabasco y $ 600 diarios en Cancún. Sus gastos adicionales fueron: $ 150 diarios en cada lugar. Los registros de Lucía, indican que gastó en total $ 3, 400 en hospedaje, $ 3,200 en comidas y $ 1,400 en gastos adicionales durante su viaje. ¿Cuántos días estuvo en cada lugar?
6. Ana compró 4 rosas, 3 claveles y 2 lilis, pagando por su compra $ 101.
   Josefina compró 2 rosas, 3 claveles y 2 lilis, pagando por su compra $ 81.
   María compró una rosa, un clavel y 3 lilis, pagando por su compra $ 77.
   ¿Qué precio tiene cada tipo de flor?

---

[28] (Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, 2011)
[29] (Baldor, 1989)

Evaluación

- Esta actividad, se evaluará con la rúbrica 4.1, que encontrarás en el apartado "Instrumentos para evaluación".

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE V. Ecuaciones cuadráticas

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Propone soluciones a ecuaciones cuadráticas, interpretando el resultado en el contexto del problema.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** Clasificación / Métodos de solución

Lectura previa

En el bloque anterior viste lo que es una ecuación y sus elementos que la integran, ahora veremos nuevamente ecuaciones, pero de segundo grado, revisa la siguiente imagen para que te ubiques dentro de tantas ecuaciones, cuáles son las que estudiarás en este bloque.

$2x + 7y + 8 = 0$ ⟶ Ecuaciones de 1er Grado (lineales)

$\boxed{6x^2 + 3x - 2 = 0}$ ⟶ Ecuaciones de 2do Grado (cuadráticas)

$x^3 - 11x^2 - 9 = 0$ ⟶ Ecuaciones de 3er Grado (cúbicas)

$x^4 + 5x^2 - 9x = 0$ ⟶ Ecuaciones de 4to Grado

Como puedes identificar en la imagen, las ecuaciones cuadráticas (2do grado) son aquellas en donde el mayor exponente, en cualquiera de las variables (letras) que existan en la ecuación; es de segundo grado.
De igual forma, es esencial que consideres tres términos muy importantes en las ecuaciones cuadráticas, las cuales son:

En la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

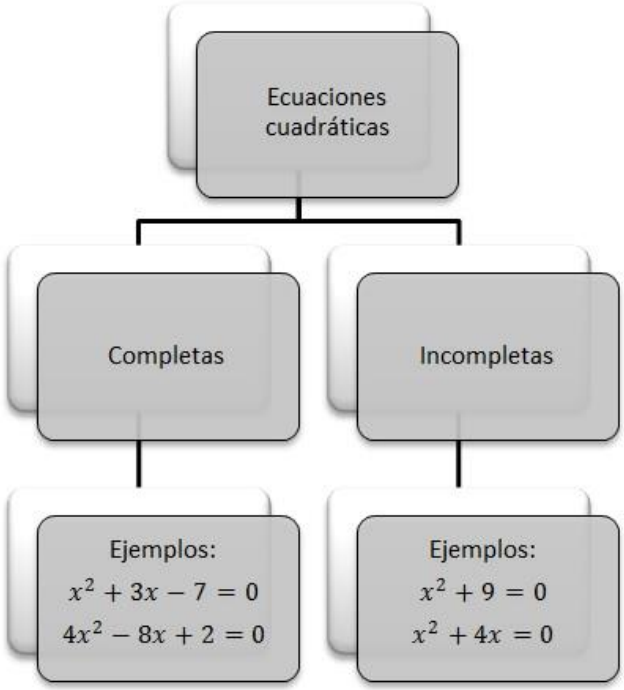
ax^2 ⟶ Término cuadrático

bx ⟶ Término lineal

c ⟶ Término constante (o independiente)

Estos son los tres términos de una ecuación cuadrática, ya verás que hay muchas más ecuaciones cuadráticas, algunas que carecen del término lineal, otras del término constante o a veces incluso de ambas, pero nunca les puede faltar el término cuadrático, por obvias razones, ya no serían ecuaciones cuadráticas, ten en cuenta que la imagen anterior solo representa a una ecuación en general, las letras **a**, **b** y **c** pueden representar cualquier número real.

Clasificación



En resumen y conforme a la imagen anterior las ecuaciones cuadráticas son, o no son completas, es a eso a lo que más se le debe prestar atención, ya que a partir de ahí podremos utilizar algún método de solución que manejes bien o se te haga más fácil, hablando de ello; ¿recuerdas algún método de solución para las ecuaciones cuadráticas?, si tu respuesta es no, aquí te presento dos de los métodos más comunes para que los analices y uses el que consideres más fácil de todos ellos.

¿Qué significa resolver una ecuación?

Resolver o encontrar la solución de una ecuación es encontrar los ***valores numéricos* (5, -2.5, ½, etc.)** *que le den sentido a la ecuación. Por ejemplo, en una ecuación $x + 4 = 9$, el único valor que se le podría dar a "x" es 5, ya que es el único número que sumado con 4, da como resultado 9.*

Resolver una ecuación cuadrática por descomposición en factores

La ecuación cudrática es la siguiente $\boldsymbol{x^2 + 5x - 24 = 0}$

Pasos:

a) La ecuación se descompone en dos factores llamados "binomios" como se muestra a continuación: $(\boldsymbol{x}\quad)(\boldsymbol{x}\quad)$

b) Una vez descompuesto en los dos factores, en el primer factor, después de la x se escribe el mismo signo del término lineal de la ecuación $\boldsymbol{x^2 + 5x - 24 = 0}$ entonces;
$(x + \quad)(x \quad)$

c) En el segundo factor se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del término lineal por el término constante de la ecuación $\boldsymbol{x^2 + 5x - 24 = 0}$ $(x + \quad)(x - \quad)$
por

Recuerda las leyes de los signos (+) por (-) es igual a (-).

d) Por último, si los signos dentro de estos paréntesis son iguales los números buscados son dos que sumados den el coeficiente del término lineal y multiplicados den el término constante de la ecuación (escribiendo el mayor de ellos en el primer factor), de lo contrario si los signos son distintos nos saltamos al paso e.

e) Si los signos dentro de estos paréntesis son distintos, los números buscados son dos, que restados den el coeficiente del término lineal y multiplicados den el término constante de la ecuación (escribiendo el mayor de ellos en el primer factor).

Tenemos la descomposición $(x + \quad)(x - \quad)$ entonces quiero que te des cuenta que los signos son distintos, por lo tanto, para finalizar utilizaremos el paso "e". El coeficiente del término lineal es $\boldsymbol{x^2 + 5x - 24 = 0}$ y el término constante es $\boldsymbol{x^2 + 5x - 24 = 0}$ entonces vamos a buscar dos números que si los restamos darían 5 y que si los multiplicáramos darían 24, esos dos números deben de ser 8 y 3.

Finalmente, escribimos esos dos números que encontramos dentro de la descomposición.

$\boldsymbol{x^2 + 5x - 24 = 0}$ ⟵ Ecuación cuadrática original

Ecuación cuadrática descompuesta en factores. ⟶ $\boldsymbol{(x + 8)(x - 3) = 0}$

¿Y cuál es la solución en este ejemplo?

Este método por descomposición en factores nos permite ver rápidamente cuál o cuáles son las soluciones de una ecuación (las ecuaciones cuadráticas casi siempre tienen dos soluciones). Tomemos la ecuación cuadrática descompuesta en factores y busquemos los valores numéricos en cada factor, en este caso sería +8 y -3, finalmente solo se le cambian los signos y esas son las soluciones;
-8 y +3

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbf{x^2 + 7x + 10 = 0}$ *por descomposición en factores*

paso b) $(x\ +\ )(x\quad)$

paso c) $(x\ +\ )(x+\ )$

paso d) $(x\ +5)(x+2)$

Las soluciones son -5 y -2

Ejemplo 2

$\mathbf{x^2 + 3x - 10 = 0}$ *por descomposición en factores*

paso b) $(x\ +\ )(x\quad)$

paso c) $(x\ +\ )(x-\ )$

paso e) $(x\ +5)(x-2)$

Las soluciones son -5 y +2

Ejemplo 3

$\mathbf{x^2 + 14x + 13 = 0}$ *por descomposición en factores*

paso b) $(x\ +\ )(x\quad)$

paso c) $(x\ +\ )(x+\ )$

paso d) $(x\ +13)(x+1)$

Las soluciones son -13 y -1

Método por fórmula general

La fórmula general para encontrar las soluciones de **cualquier ecuación cuadrática** es la siguiente

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

*Nota: El valor de **a**, **b** y **c** en la fórmula anterior son; para "a" es el coeficiente del término cuadrático (x^2), el valor de "b" es el coeficiente del término lineal (x), y el valor de "c" es el valor de la constante de la ecuación, todos esos valores se visualizan muy claramente en la ecuación cuadrática a la cual se le esté calculando sus soluciones.*

Ejemplo

Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^2 + 3x + 2 = 0}$ por fórmula general.

Se aplica la fórmula general teniendo cuidado de utilizar los signos correctos de la fórmula y también los signos que le corresponde a cada coeficiente en la ecuación cuadrática.

*Nota: El valor de **a**, **b** y **c** para este ejemplo son; para "a" es igual a +1, para "b" es igual a +3 y para "c" es igual a +2. Sustituyamos esos valores en la fórmula general.*

En la fórmula general en vez de escribir la letra "a" se escribe su valor numérico, y así para las demás letras b y c.

$$x = \frac{-(+3) \pm \sqrt{(+3)^2 - (4)(+1)(+2)}}{2(+1)}$$

Simplificamos y nos queda:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (8)}}{2}$$

Simplificamos nuevamente:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Finalmente, para encontrar las soluciones utilizamos la última simplificación y una de las dos soluciones será:

$$\frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = \boldsymbol{-1}$$

La segunda solución será:

$$\frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = \boldsymbol{-2}$$

Actividad 5.1

Instrucciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas en tu libreta por el método de solución que mejor manejes y señala cuál de las opciones contiene las soluciones correctas.

1) ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 8x + 16 = 0$?
 a) $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$
 b) $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$
 c) $x_1 = 8$ y $x_2 = -1$
 d) $x_1 = -2$ y $x_2 = -4$

2) ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 + 4x + 4 = 0$?
 a) $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$
 b) $x_1 = -4$ y $x_2 = -1$
 c) $x_1 = -2$ y $x_2 = -2$
 d) $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$

3) ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 3 = 0$?
 a) $x_1 = 4$ y $x_2 = -1$
 b) $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$
 c) $x_1 = -1$ y $x_2 = -2$
 d) $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$

4) ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 3x - 10 = 0$?
 a) $x_1 = -5$ y $x_2 = 2$
 b) $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$
 c) $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$
 d) $x_1 = 1$ y $x_2 = -10$

5) ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 + 8x + 16 = 0$?
 a) $x_1 = 6$ y $x_2 = -1$
 b) $x_1 = -4$ y $x_2 = -4$
 c) $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$
 d) $x_1 = -6$ y $x_2 = -1$

6) ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 8 = 0$?
 a) $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$
 b) $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$
 c) $x_1 = 5$ y $x_2 = 2$
 d) $x_1 = -3$ y $x_2 = -2$

7) ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 3 = 0$?

a) $x_1 = -1 \quad y \quad x_2 = 8$
b) $x_1 = 3 \quad y \quad x_2 = -1$
c) $x_1 = 4 \quad y \quad x_2 = 3$
d) $x_1 = 1 \quad y \quad x_2 = -2$

Evaluación

- Se evaluará mediante el instrumento de evaluación 5.1

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Propone soluciones a ecuaciones cuadráticas interpretando el resultado en el contexto del problema.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- **Conocimiento (s):** Métodos de solución

Instrucciones

1.- Lee con atención el siguiente problema de aplicación y con ayuda del dibujo contesta en tu libreta las preguntas referentes al texto.

En un jardín de fiestas se construyó una alberca de 9m de ancho por 15m de largo, ahora se va a colocar un pasillo alrededor de ésta, aprovechando los $81m^2$ de piso antiderrapante que sobraron cuando hicieron la entrada al jardín. Calcula cuánto medirá de ancho el pasillo para que se use todo el material.

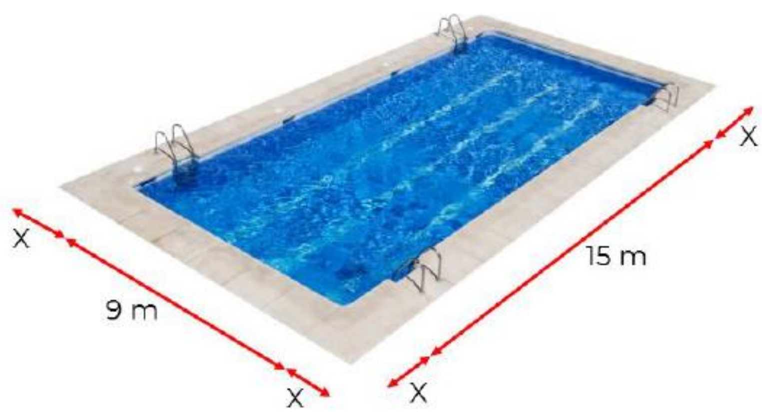


Figura tomada de Subsecretaría de Educación Media Superior (2021). *Guía de estudio: Evaluación diagnóstica al ingreso a la Educación Media Superior*. México

1.- ¿Cuál es la longitud de la alberca incluyendo el pasillo que se colocará?

____

____

2.- ¿Cuál es el ancho de la alberca incluyendo el pasillo que se colocará?

____

____

3.- ¿Cuál es el área de la alberca sin incluir el pasillo?

____

____

4.- ¿Cómo expresarías el área de la alberca más el pasillo?

____

____

5.- Plantea la ecuación para el cálculo del área de la alberca con el pasillo, ten en cuenta que esta área deber ser igual al área de la alberca sola más $81m^2$.

____

____

5.- Resuelve la ecuación de segundo grado que planteaste en la pregunta anterior, aplicando la fórmula general. Determina el ancho del pasillo alrededor de la alberca.

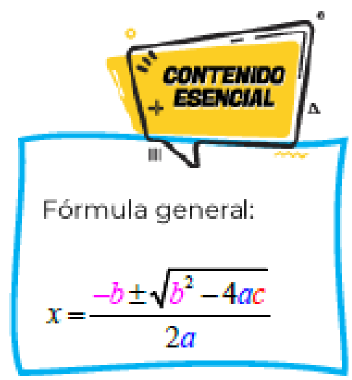


Figura tomada de Subsecretaría de Educación Media Superior (2021). *Guía de estudio: Evaluación diagnóstica al ingreso a la Educación Media Superior*. México

Evaluación

- Se evaluará mediante el instrumento de evaluación 5.2

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué aprendí sobre variación directa e inversa?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE VI. Sucesiones y series

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Explica regularidades de sucesiones, siendo perseverante en la búsqueda de patrones que se encuentran en su entorno.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de su objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** Búsqueda de patrones.

¿Puedes determinar qué número continúa?

a) 3, 5, 7, 9, ____, ____, 15, ____, 19, …
b) 80, 40, 20, ____, 5
c) 4, 12, 36, ____, 324, ____, 2916, …

Lectura previa

Una práctica común en el razonamiento matemático, es el análisis y búsqueda de patrones. En nuestro entorno podemos identificar diversos ejemplos de patrones, como en las especies de animales, las fumarolas en un volcán en erupción, las figuras hexagonales en un panal de abejas, las olas del mar, e incluso las franjas en una cebra. Algunos patrones, los podemos identificar a simple vista y otros requieren de un análisis y operaciones matemáticas para determinarlos.

Uno de los conceptos que utilizarás en este bloque es el siguiente:

Sucesión o progresión

Es un conjunto de números ordenados (llamados términos) según una regla de formación o patrón. Cada término se separa con una ",".

Figura tomada de internet: https://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/images/sequence.svg

Ejemplos:

a) 1, 2, 3, …
b) 1, 4, 7, 10, …
c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$
d) 2, 4, 6, 8, 10, …

Algunas sucesiones tienen una estructura lógica y podemos encontrarlas fácilmente en nuestro entorno. A estas les podemos llamar también *progresiones* y a los miembros o elementos que las integran les llamaremos *términos* y suele denotarse con la letra a seguido de un subíndice que indica el número de término.

Cuando una sucesión tiene un número fijo de términos decimos que es finita; de otro modo, se conoce como infinita.

Ejemplo:

a) 1,2,3,4,5, … " **Infinita**" (se distingue por los tres puntos, que indica que el patrón continúa)
b) 2,4,6. "**Finita**" (el punto indica que la sucesión se limita a cierto número de términos, el 6 es el último término de esta sucesión)

Si a_1 representa el primer término de una sucesión, a_2 el segundo, a_3 el tercero, y así sucesivamente, podemos denotarla como:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \underbrace{a_{n-2}}_{antecesor}, \underbrace{a_{n-1}}_{sucesor}, \underbrace{a_n}_{\substack{\text{último}\\ \text{término}}}$$

La expresión $\boldsymbol{a_n}$ se conoce como término general o el $\boldsymbol{n}$ – ***ésimo*** **término** (último término).

Para determinar los términos en una sucesión, debemos sustituir n por 1, para conocer el primero, después n por 2 para conocer el segundo, y así sucesivamente.

Ejemplo 1

A partir de la expresión general de la siguiente sucesión, determina los primeros 5 términos:
$\boldsymbol{a_n = 2n + 3}$

Solución:

Se considera la expresión dada y se sustituyen los valores de cada término en ella.

$a_{(1)} = 2(1) + 3 = 5$
$a_{(2)} = 2(2) + 3 = 7$
$a_{(3)} = 2(3) + 3 = 9$
$a_{(4)} = 2(4) + 3 = 11$
$a_{(5)} = 2(5) + 3 = 13$

De este modo, la sucesión corresponde a 5, 7, 9, 11, 13, …

Si se desea conocer un término en particular, se puede determinar la expresión del término general a_n analizando los valores de los términos para estructurar la fórmula correspondiente.

Ejemplo 2

Determina una expresión para el término general de 3, 6, 11, 18, 27, ...

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	3	6	11	18	27					

Al observar la secuencia de términos, identificamos que cada término es dos unidades más que el cuadrado de n*, quedando la expresión general como:* $\boldsymbol{a_n = n^2 + 2}$

Serie

Serie: es la suma de los primeros n términos de una sucesión. Este conjunto de números se ordena según un patrón o regla de formación. Al estar los términos de la serie unidos por un operador, se puede calcular el valor de la serie.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Esta expresión se puede escribir de manera simplificada usando la notación *sigma*:

$s = \sum^{n} a_1$ que se lee sumatoria de los términos a_i para i = 1 hasta n

Así: $s = \sum_{i=1}^{n} a_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ expresa la suma de los primeros 5 términos de la sucesión a_n

La diferencia más clara entre una sucesión y una serie, es que, la sucesión es un listado de términos, y en una serie, los términos se pueden sumar para calcular el valor de la misma.

Patrón o regla de formación: es lo que nos permite conocer cómo calcular cada término de la sucesión o de la serie a partir de la posición del mismo. Regularmente las posiciones empiezan en 1.

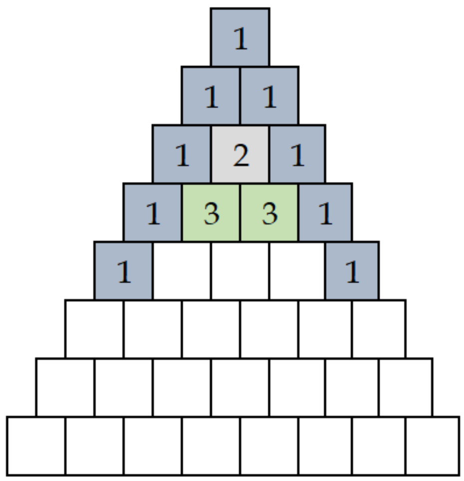
Ahora que ya tienes noción de las sucesiones, series y patrones, te retamos a resolver el siguiente ejercicio.

Actividad 6.1

Instrucciones:

1. Después de revisar la información anterior, resuelve el siguiente ejercicio en tu libreta o en hojas blancas:

Entre los patrones más interesantes para entender este tema, se encuentra el triángulo de Pascal (llamado así en honor de Blaise Pascal, un afamado matemático y filósofo francés) también llamado triángulo de Tartaglia. El cual se construye a partir de filas infinitas de números ordenados en forma de triángulo, de tal manera, que se asignan los números 1 siempre en los extremos, y en la parte interna, cada número es la suma de los dos números que tiene encima. Sigue el patrón marcado, escribe en cada espacio el valor que corresponda y coloréalo para distinguirlo:



2. Escribe 3 ejemplos de patrones que observes en tu contexto, y detállalos en las siguientes líneas.

Evaluación

- La actividad 1, te será evaluada con el instrumento 6.1, ubicado en el apartado Instrumentos para la evaluación.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve colaborativamente e interpreta problemas reales o hipotéticos que representan relación con sucesiones y series para modelar distintos fenómenos de su localidad.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de su objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** sucesiones y series.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

A pesar que en un primer momento podemos pensar que las sucesiones, solo consisten en una colección de números que no tienen ninguna aplicación práctica, lo cierto es que podemos encontrar aplicaciones de ellas en la vida cotidiana.

Hay dos tipos de sucesiones. Tenemos las **sucesiones aritméticas** y las **sucesiones geométricas**, cada una, con características y reglas diferentes.

Cuando en una sucesión después del primer término, los siguientes se forman a partir de sumar un número fijo, se denominan **sucesión aritmética**.

Figura tomada de internet: https://www.canalipe.tv/noticias/otros/por-que-es-util-progresion-aritmetica-en-el-atletismo

La regla general de una sucesión aritmética se construye desarrollando la expresión:

$$\boxed{a_n = a_1 + d(n-1)}$$

Donde llamamos d a la diferencia común entre un término y otro, n es cualquier número mayor que 1.
Para obtener el valor de d, usamos:

$$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$$

Ejemplo 1

Sea la sucesión aritmética: $2,6,10,\mathbf{14},\ldots$ Encuentra los términos a_5 y a_6.

Solución:

Sabemos que $\mathrm{a}_1 = 2$, $\mathrm{a}_2 = 6$, $\mathrm{a}_3 = 10$, $\mathrm{a}_4 = 14$, … por lo tanto, debemos aplicar la fórmula para conocer el valor de d:

$d = a_n - a_{n-1}$ $\qquad d = 14 - 10$ $\qquad d = 4$

Ahora aplicas la regla general para obtener el término 5 y 6 solicitado:

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_5 = 2 + 4(5-1)$	$a_6 = 2 + 4(6-1)$
$a_5 = 2 + 4(4)$	$a_6 = 2 + 4(5)$
$a_5 = 2 + 16$	$a_6 = 2 + 20$
$a_5 = 18$	$a_6 = 22$

Por lo que la sucesión con los dos nuevos términos es: 2,6,10,14,18,22, ...

Ejemplo 2

Indica si la sucesión 11,8,5,2, y -1 es aritmética o no.

Solución:

Sabemos que $\mathrm{a}_1 = 11$, $\mathrm{a}_2 = 8$, $\mathrm{a}_3 = 5$, $\mathrm{a}_4 = 2$ y $\mathrm{a}_5 = -1$
Aplicamos la fórmula para conocer el valor de d:

$\mathrm{d}_1 = \mathrm{a}_5 - \mathrm{a}_4 = (-1) - (2) = -1 - 2 = -3$
$\mathrm{d}_2 = \mathrm{a}_4 - \mathrm{a}_3 = (2) - (5) = 2 - 5 = -3$
$\mathrm{d}_3 = \mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_2 = (5) - (8) = 5 - 8 = -3$
$\mathrm{d}_4 = \mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1 = (8) - (11) = 8 - 11 = -3$

Dado que hay una diferencia constante -3 entre todos los términos sucesivos de la secuencia se trata de una sucesión aritmética.

Ejemplo 3

Indica si la sucesión 1, 2, 4, 8 es aritmética o no.

Solución:

Sabemos que $\mathrm{a}_1 = 1$, $\mathrm{a}_2 = 2$, $\mathrm{a}_3 = 4$, $\mathrm{a}_4 = 8$
$\mathrm{d}_1 = \mathrm{a}_4 - \mathrm{a}_3 = (8) - (4) = 8 - 4 = 4$
$\mathrm{d}_2 = \mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_2 = (4) - (2) = 4 - 2 = 2$
$\mathrm{d}_3 = \mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1 = (2) - (1) = 2 - 1 = 1$

No hay una diferencia constante entre dos términos sucesivos de esta sucesión, por lo tanto, no es una sucesión aritmética.

Una **sucesión geométrica** se define como aquella en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un valor fijo predefinido que se conoce como **razón** ($\boldsymbol{r}$).

La regla general de una secuencia o progresión geométrica se construye desarrollando la expresión:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

El valor de $\boldsymbol{r}$ puede calcularse a partir de dos términos consecutivos de una sucesión geométrica por división:

$$\boxed{r = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Al dividir un término entre su antecesor, se obtiene el valor de $\boldsymbol{r}$, si cualquier otro término dividido entre su antecesor nos da el mismo valor de r, se trata de una secuencia geométrica.

Ejemplo 4

Determina la razón de la sucesión geométrica 2, 6, 18, 54.

Solución:

Sabemos que $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 18, a_4 = 54$
Aplicamos la fórmula para obtener **r**

$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ $\quad r_1 = \frac{54}{18} = 3$ $\quad r_2 = \frac{18}{6} = 3$ $\quad r_3 = \frac{6}{2} = 3$

Por lo tanto, se trata de una sucesión geométrica con $\mathbf{r = 3}$

Ejemplo 5

Determina si la sucesión $4, 16, 64, 256, 1024, \ldots$ es una sucesión geométrica. En caso afirmativo, encuentra el valor de la razón geométrica.

Solución:

Sabemos que $a_1 = 4, a_2 = 16, a_3 = 64, a_4 = 256, a_4 = 1024$
Aplicamos la fórmula para obtener **r**

$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ $\quad r_1 = \frac{1024}{256} = 4$ $\quad r_2 = \frac{256}{64} = 4$ $\quad r_3 = \frac{64}{16} = 4$ $\quad r_4 = \frac{16}{4} = 4$

Por lo tanto, se trata de una sucesión geométrica con $r = 4$

Ahora que ya conoces el procedimiento para identificar patrones, series y sucesiones, te presentamos los siguientes ejercicios:

Actividad 6.2.1

Instrucciones

1. Lee detalladamente el problema que se presenta, responde las preguntas y da solución a cada una según corresponda.
2. Desarrolla el ejercicio en tu libreta o en hojas blancas, cuidado el procedimiento, orden y limpieza del mismo.

En una rutina de 2 meses de ejercicios, el entrenador inicia con 15 reflexiones de brazos, en la siguiente semana 21, en la semana 3 son 27. ¿Cuántas flexiones realizará en la semana 7?
La sucesión está formada por la colección de números: 15, 21, 27, 33, …

Para responder a la pregunta, primero debes construir la regla general de esta sucesión.

1. Escribe el primer número de la sucesión:
   a_1= ____________________
2. Identifica los términos de la sucesión:
   a_1= _______ a_2= _______ a_3= _______ a_4= _______
3. ¿Cuál es la diferencia de dos términos consecutivos?
   d = ___________________
4. ¿La diferencia entre cualquier par de términos siempre es la misma?
5. Si respondiste afirmativamente a la pregunta anterior, entonces, ¿es una sucesión?
6. El siguiente paso es determinar la regla general de la sucesión, aplicando la formula $a_n = a_1 + d(n-1)$ donde tienes que sustituir los valores que calculaste en las preguntas anteriores.
7. Finalmente, calcula el término que se te pide, respecto a la semana 7, esto es:
   a_7= ____________________

Actividad 6.2.2

Instrucciones

1. Lee detalladamente cada ejercicio que se presenta, subraya la respuesta correcta y da solución a cada una pregunta según corresponda.
2. Desarrolla el ejercicio en tu libreta o en hojas blancas, cuidando el procedimiento, orden y limpieza del mismo.

I. ¿Cuál es la regla que determina la sucesión? 4, 8, 12, 16, 20, …

a) $a_n = 4n$
b) $a_n = 4n - 1$
c) $a_n = n + 4$
d) $a_n = 2n + 2$

II. ¿Cuál es la expresión general de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{19}{2}, \frac{25}{2}, \ldots$?

a) $a_n = n - \frac{5}{2}$
b) $a_n = 2n - \frac{5}{2}$
c) $a_n = -n - \frac{5}{2}$
d) $a_n = 3n - \frac{5}{2}$

III. En una caja popular dependiendo de la cantidad que ahorras es el préstamo que pueden otorgarte, de acuerdo con la siguiente tabla:

Dinero ahorrado ($)	Préstamo ($)
3	9
4	10
5	11
6	12
7	13

¿Qué expresión define la sucesión que relaciona la cantidad ahorrada y el préstamo otorgado?

a) $a_n = 3n$
b) $a_n = n + 6$
c) $a_n = n^2$
d) $a_n = n + 7$

Evaluación

- La actividad 2, te será evaluada con el instrumento 6.2, ubicado en el apartado Instrumentos para la evaluación.

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿Lo que aprendiste lo identificas y lo utilizas en situaciones cotidianas?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE IV. Modelos de probabilidad y estadística

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza medidas de tendencia central para interpretar de forma crítica y consciente un fenómeno social o natural. / Organiza y representa información mediante métodos gráficos, proponiendo formas innovadoras de solución a diversas problemáticas de su entorno
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Conceptos básicos de estadística descriptiva / Medidas de tendencia central / Media /Mediana /Moda / Gráficos / De pastel / De barras / Histograma.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

El campo de Matemáticas tiene como eje desarrollar el pensamiento lógico-matemático para interpretar situaciones reales e hipotéticas que le permitan al observador, proponer alternativas de solución desde diversos enfoques, priorizando las habilidades del pensamiento tales como: la búsqueda de patrones o principios que subyacen a fenómenos cotidianos, la generación de diversas alternativas para la solución de problemas, el manejo de la información, la toma de decisiones basadas en el análisis crítico de información matemática, interpretación de tablas, gráficas, diagramas, textos con símbolos matemáticos que se encuentren en su entorno permitirán, tanto la argumentación de propuestas de solución como la predicción del comportamiento de un fenómeno a partir del análisis de sus variables.

Medidas de Tendencia Central (para datos no agrupados)

Una medida de tendencia central, un parámetro de tendencia central o una medida de centralización, es un número o valor que se adquiere, el cual se encuentra ubicado en el centro de la distribución de una serie de datos u observaciones. Las medidas de tendencia central son: la media aritmética, la mediana y la moda.

Media aritmética

- La media aritmética de un conjunto de datos es el valor medio que los representa. Es un valor numérico que está comprendido entre el menor valor y el mayor de un conjunto de datos. Puede no coincidir con alguno de los datos, y también puede ser un número decimal.
- Solo se obtiene con datos cuantitativos (cantidades). Se suele representar con el símbolo $\bar{X}$

Cálculo de la media aritmética

Se obtiene dividiendo la suma de todos los datos entre el número total de ellos. Dicho de otra manera, se refiere a la suma de todos los datos observados, dividido entre el total de observaciones realizadas.

Ejemplo 1

Un estudiante de preparatoria obtuvo las siguientes calificaciones por materia durante su primer parcial:

Materia	Calificación
Física 1	8.7
Matemáticas 1	8.4
Química 1	8.6
Taller de lectura y escritura 1	9.3
Metodología de la investigación	9.1
Inglés 1	8.5
Informática 1	8.9
Orientación Educativa	10
Actividad Paraescolar	10

Determina la media aritmética o promedio del primer parcial del estudiante.

Solución:

Paso 1: Sumaremos todas las calificaciones obtenidas de cada materia.
Suma: 8.7 + 8.4 + 8.6 + 9.3 + 9.1 + 8.5 + 8.9 + 10 + 10 = 81.5

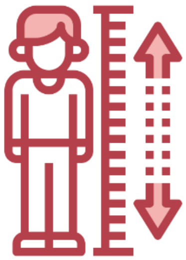
Paso 2: Identificamos el total de materias representada con la letra N.
Total, de materias: 9

Paso 3: Aplicamos la fórmula de la media aritmética.

Fórmula: $\bar{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n}{N}$ $\quad\quad$ $\bar{X} = \frac{\text{Suma de todas las calificaciones}}{\text{total de materias}}$

Paso 4: Sustituimos los datos obtenidos en la fórmula y resolvemos.
$\bar{X} = \frac{81.5}{9} = 9.05\ \ promedio\ de\ todas\ las\ calificaciones.$

Ejemplo 2



La altura (en cm) de 24 alumnos de quinto semestre es: 160, 168, 164, 170, 162, 166, 172, 168, 164, 162, 160, 168, 170, 160, 162, 164, 160, 170, 160, 164, 168, 162, 160, 160. ¿Cuál es la altura media del grupo?

Determina la media aritmética o promedio de altura de los alumnos.

Solución:

$$\bar{X} = \frac{\text{Suma de todas las alturas}}{\text{total de alumnos}}$$

Suma de las alturas de todos los alumnos

160 + 168 + 164 + 170 + 162 + 166 + 172 + 168 + 164 + 162 + 160 + 168 + 170 + 160 + 162 + 164 + 160 + 170 + 160 + 164 + 168 + 162 + 160 + 160 = 3944 cm

- Total de alumnos = 24

Sustitución y operación:

$$\bar{X} = \frac{3{,}944}{24} = 164.33\ cm \qquad \textit{Promedio de altura de los alumnos.}$$

La mediana

La mediana estadística, es el dato o valor que se localiza al centro de todos los datos u observaciones que se encuentran en orden ascendente o descendente y solo es localizable para variables cuantitativas. La mediana está representada por las letras (Me)

Para localizar la mediana podemos realizar lo siguiente:

Mediana (Me)

- La mediana de un conjunto de datos es el valor central de ellos.
- Si el número de datos es **impar**, se ordenan y la mediana será el valor central.
- Si el número de datos es **par,** se ordenan y la mediana será la **semisuma** de los dos valores centrales.

Ejemplo 1

Retomando el ejercicio de las calificaciones, calcularemos la mediana.

Materia	Calificación
Física 1	8.7
Matemáticas 1	8.4
Química 1	8.6
Taller de lectura y escritura 1	9.3
Metodología de la investigación	9.1
Inglés 1	8.5
Informática 1	8.9
Orientación Educativa	10
Actividad Paraescolar	10

Solución:

Paso 1:

- Ordenamos todos los datos de menor a mayor y determinamos si el conjunto de datos es par o impar.

8.4	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.9**	**9.1**	**9.3**	**10**	**10**

Son 9 datos en total, por lo que el conjunto es impar.

Paso 2:

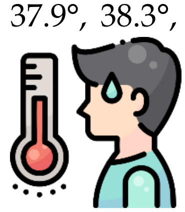
- Por ser impar, solo localizamos el dato de en medio para determinar la mediana.

8.4	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.9**	**9.1**	**9.3**	**10**	**10**

La mediana de las calificaciones es: Me = 8.9

Ejemplo 2

En un hospital se llevó el registro de diez mediciones de temperatura a pacientes con influenza y síntomas de gripe obteniendo los siguientes resultados: 38.1°, 37.9°, 38.3°, 39°, 38.6°, 39.2°, 38.9°, 38.3°, 39.6°, 39.4°. Determina la mediana de las temperaturas.



Solución:

Paso 1:

- Ordenamos todos los datos de menor a mayor y determinamos si el conjunto de datos es par o impar.

37.9°	**38.1°**	**38.3°**	**38.3°**	**38.6°**	**38.9°**	**39°**	**39.2°**	**39.4°**	**39.6°**

Son 10 datos en total, por lo que el conjunto es par.

Paso 2:

- Por ser par, localizamos los dos datos de en medio de la tabla ordenada y lo dividimos entre 2, el resultado obtenido representa la mediana.

37.9°	**38.1°**	**38.3°**	**38.3°**	**38.6°**	**38.9°**	**39°**	**39.2°**	**39.4°**	**39.6°**

Tenemos que:

$$Me = \frac{38.6° + 38.9°}{2} = 38.75\ °$$

La moda

Estadísticamente la moda, es el dato observado con mayor frecuencia, es decir, es el valor que tiene más repeticiones en un conjunto de observaciones. La moda es localizable tanto para observaciones cuantitativas como cualitativas y está representada con las letras (Mo).

Moda (Mo)

Se determina observando la variable que ocurre con mayor frecuencia (el que más se repite)

Ejemplo 1

En un kínder, una maestra realizó una actividad de medir la estatura de 12 niños, obteniendo las siguientes medidas en centímetros.

105	102	93	98	105	99	110	115	108	105	93	120

La moda es el valor que más se repite, por lo tanto: Mo= 105 cm, repitiéndose 3 veces.

Ejemplo 2

Un estudiante de preparatoria obtuvo las siguientes calificaciones por materia durante su primer parcial:

Materia	Calificación
Física 1	9
Matemáticas 1	9
Química 1	9.3
Taller de lectura y escritura 1	9.3
Metodología de la investigación	9.4
Inglés 1	8.5
Informática 1	9
Orientación Educativa	10
Actividad Paraescolar	9

Determina la moda de las calificaciones obtenidas por el estudiante.

La moda es el valor que más se repite, por lo tanto: Mo= 9, repitiéndose 4 veces.

- **Organización y representación de información mediante métodos gráficos**

Durante una investigación, al realizar las observaciones, nos encontramos con un gran número de datos, los cuales van a ser necesarios; ordenarlos, organizarlos, clasificarlos y presentarlos adecuadamente, con el fin, de que la información que se presenta pueda ser descrita para una fácil comprensión, descripción y análisis del suceso o fenómeno estudiado, esto nos permitirá llegar a conclusiones válidas para la toma de decisiones. (Paredes, 2012)

Pasos para la organización y presentación de datos.

La organización y presentación de los datos estadísticos, supone realizar los siguientes pasos:

- ***Evaluación crítica:*** Consiste en inspeccionar la validez o confiabilidad de los datos, para corregir los errores y omisiones de acuerdo con ciertas reglas fijas.
- ***Codificación:*** Es una técnica mediante el cual los datos se convierten en número, permitiendo de esta forma su procesamiento electrónico o manual.
- ***Clasificación****:* Consiste en establecer las categorías de las variables.
- ***Procesamiento o tabulación:*** Esto se refiere a la contabilización o registro del número de casos en cada una de las categorías de la variable. El plan de tabulación es el primer ordenamiento de los datos, éstas son para construir las llamadas "tablas estadísticas".
- ***Presentación de datos:*** Éstos se presentan en cuadros y gráficos estadísticos. La presentación implica tener la información estadística organizada, para proceder al análisis e interpretación de los resultados y de los aspectos considerados de la población, objeto o suceso en estudio.

Estructura de los cuadros y gráficos estadísticos.

Los cuadros estadísticos presentan ordenadamente los datos en fila y columnas, clasificados y agrupados de acuerdo con uno o más criterios específicos. Se pueden considerar variables cualitativas, cuantitativas discretas, cuantitativas continuas o una combinación de ellas.

Esta información no sólo es un valor numérico, sino que además merece la interpretación de tipo cualitativo. La finalidad es ofrecer información resumida de fácil lectura, comparación e interpretación.

Partes de un cuadro estadístico.

1. ***Número:*** Es el código de identificación de la tabla. Este número se describe a continuación de la palabra "tabla".
2. ***Título:*** Es la descripción resumida del contenido del cuadro. La redacción del título debe ser breve, clara y completa, de modo que se pueda deducir sin ambigüedad que tipo de información tiene el cuadro.
   Un título completo, debe responder las siguientes preguntas:
   - Qué: a qué se refiere la información contenida en la tabla que se estudia.

- Cómo: cómo están ordenados o clasificados los datos en el cuadro. La variable ubicada en la fila se identifica como la preposición "por" y la variable que está en la columna se le antepone "según" (la(s) variables).
- Dónde: se refiere al lugar geográfico a la que corresponde la información.
- Cuándo: Se refiere al momento o periodo de tiempo que está referida la información, puede ser el momento específico o puntual, como también varios años, meses o semanas, etc.

Por ejemplo:

CUADRO No 01. Hábito de fumar según sexo de los clientes atendidos en una tienda local de autoservicio abril de 2021.

CLIENTES ATENDIDOS EN UNA TIENDA LOCAL DE AUTOSERVICIO			
VARIABLE	HOMBRE	MUJER	TOTAL
FUMADOR	65	10	75
NO FUMADOR	45	6	51
TOTAL	110	16	126
Abril de 2021			

- Qué: clientes atendidos.
- Cómo: por hábito de fumar según sexo.
- Dónde: Tienda local de autoservicio.
- Cuando: abril 2021.

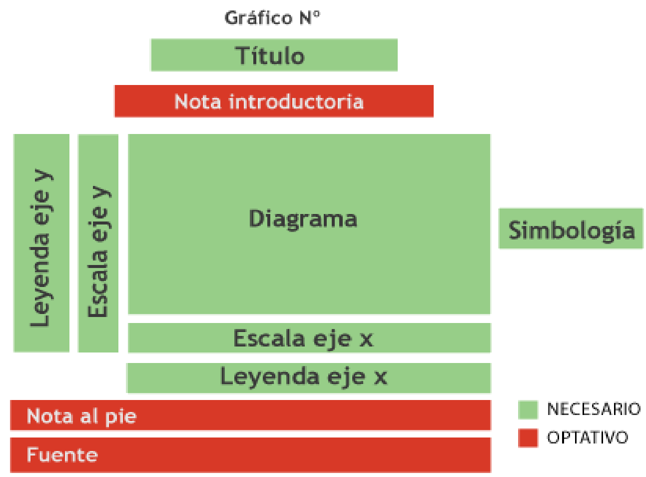
3. ***Encabezamiento:*** Es la descripción en filas y columnas de un cuadro estadístico, el encabezamiento se ubica en la parte superior del cuerpo o cuadro.
4. ***Cuerpo del cuadro:*** Es el contenido numérico del cuadro. Es la parte donde se colocan los datos correspondientes a las características o variables indicados en el encabezamiento.
5. ***Fuente:*** Es la indicación al pie del cuadro, que sirve para nombrar la entidad responsable de donde se obtuvieron los datos presentados.
6. ***Nota de pie de páginas:*** se usa para aclarar algunos términos o siglas, y también para indicar que elementos están o no incluidos en algunos de los conceptos del cuadro.
7. ***Elaboración:*** Aquí se indica los autores de la investigación.
8. ***Unidad de medida:*** Se escribe debajo del título, se usa cuando se abrevia la escritura de las cifras y para expresar en que unidades está expresada la variable.

Gráficos estadísticos.

Es un diagrama o una representación pictórica, con el objeto de ilustrar los cambio o dimensiones de una variable, para comparar visualmente dos o más variables similares o relacionadas. Para una rápida comprensión de situaciones o variaciones en cantidades, es muy útil traducir los números en figuras o imágenes. Toda figura es superior al texto escrito por que trasmite de manera casi instantánea, hecho, cantidades y comportamientos de variables. (Paredes, 2012)

Partes de un gráfico estadístico.

a. ***Número de la figura:*** Es el código de identificación del gráfico. Este número se escribe a continuación de la palabra gráfico.
b. ***Título:*** Como en las tablas, es una descripción del contenido gráfico.
c. ***Los diagramas:*** Está dado por la propia figura geométrica, están representados por los datos indicados del cuadro.
d. ***Fuente:*** es la información de donde se toman los datos estadísticos representados.
e. ***Escalas o leyendas:*** Son indicaciones donde se precisan la correspondencia entre los elementos de los gráficos y la naturaleza de las medidas representadas.



Tipos de gráficos estadísticos.

Gráfico de barras: Un gráfico de barras o gráfico de columnas, es una forma de representar gráficamente un conjunto de datos o valores mediante barras rectangulares de longitud proporcional a los valores representados. (Wikipedia, 2016)

Ejemplo:

Deporte preferido	Frecuencia absoluta
Baloncesto	12
Fútbol	8
Balonmano	10
Tenis	6
Atletismo	3
Voleibol	5
Natación	6
TOTAL	50

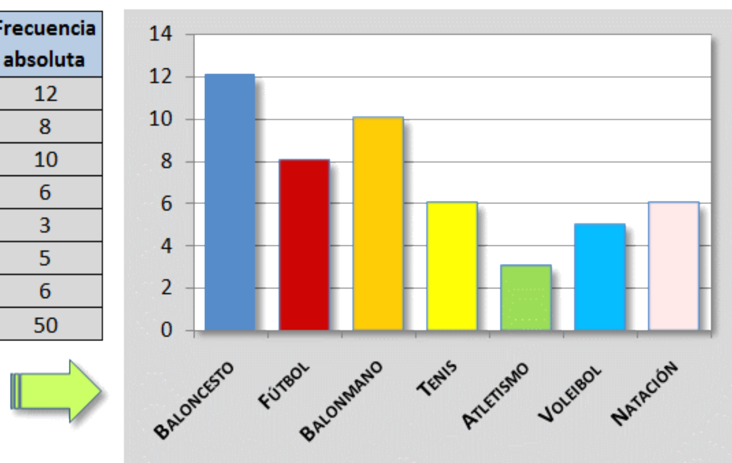
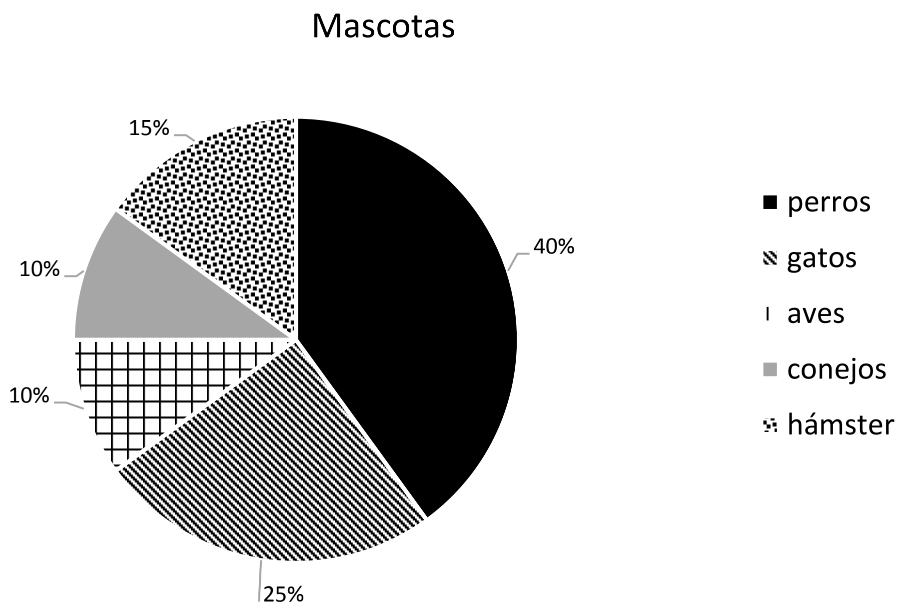


Figura tomada de:
https://es.liveworksheets.com/worksheets/es/Matem%C3%A1ticas/Gr%C3%A1fico_de_Barras/Gr%C3%A1fica_de_barras_yj845957hj

Gráfico circular: Un gráfico o gráfica circulares, también llamado "gráfico de pastel ", "gráfica de pizza", o "gráfica de 360 grados", es un recurso estadístico que se utiliza para representar porcentajes y proporciones. (Matemovil, 2020)



Histograma: El histograma es la representación gráfica de un grupo de datos estadísticos. Estos, agrupados en intervalos numéricos o en función de valores absolutos.

El histograma es entonces un gráfico que permite mostrar cómo se distribuyen los datos de una muestra estadística o de una población. Esto, respecto a alguna variable numérica.

En el histograma se suelen usar barras, cuya altura dependerá de la frecuencia de los datos, que corresponde al eje Y. En tanto, en el eje X podemos observar la variable de estudio. (Westreicher, 2020)

Figura tomada de: http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica3/histogramas.html

Actividad 7.1.1

Instrucciones:

1. Resuelve correctamente a cada uno de los problemas en tu libreta de apuntes y subraya la respuesta correcta.

I. Se tiene un conjunto de muestras obtenidas en seis cables de acero que sirven como soporte de una antena de radio, las cuales son: 15.2 m, 15 m, 15.1 m, 15.2 m, 15.1 m y 15 m, determine su media aritmética.

a) 15.1 m b) 15.7 m c) 15.01 m d) 15.02m e) 15.07 m

II. Se han tomado varias muestras de un tipo de aceite de coco y se determina la cantidad de proteína por cada 100 ml de este aceite, encontrándose lo siguiente: 26.5 ml, 24.8 ml, 25.3 ml, 30.5 ml, 21.4 ml, determine la cantidad promedio de proteína encontrada en la muestra por cada 100 ml de aceite de coco que se elabora.

a) 26.8 ml b) 24.9 ml c) 25.7 ml d) 25.9 ml e) 24.5 ml

III. Se realizan varias anotaciones de una muestra que contiene cobre (Cu), las lecturas se llevan a cabo en un espectrofotómetro de absorción atómica, obteniendo los siguientes resultados: 12.3%, 12.28%, 12.27%, 12.3%, 12.24%, 15.01%, determine la concentración promedio de Cu en la muestra.

a) 12.33% Cu b) 12.13% Cu c) 13.2% Cu d) 13.37% Cu e) 12.73% Cu

IV. En una institución educativa de nivel superior, se desea conocer la edad promedio de los alumnos al iniciar sus estudios académicos, se encuestan las edades de algunos de ellos de cierta clase y estas son las que siguientes edades obtenidas: 20 años, 18 años, 18 años, 19 años, 18 años, 19 años, 21 años, 20 años, 18 años, 18 años, 19 años.

a) 19.8 años b) 18.6 años c) 18.7 años d) 18.9 años e) 19.8 años

Actividad 7.1.2

Instrucciones:

1. Resuelve cada uno de los problemas en tu libreta de apuntes. Anota el desarrollo y encierra la respuesta obtenida.

I. La siguiente información corresponde al puntaje obtenido en el primer parcial de matemáticas de 11 alumnos: 17, 19, 19, 19, 18, 16, 18, 18, 19, 15, 20. Determina cual es el valor de la mediana.

II. Una empresa sufrió una falta de personal, por lo que algunos trabajadores, tuvieron que realizar horas extras durante esa quincena, 10 empleados trabajaron las siguientes horas extras: 24, 26, 19, 24, 28, 30, 16, 19, 27 y 31 horas. Determina la mediana de horas laboradas.

III. En una evaluación calificada por puntaje de 0 a 10; 3 alumno obtuvieron 5, 3 alumnos obtuvieron 7 y 2 alumnos obtuvieron 9. Hallar la mediana de las calificaciones.

IV. Una cajera de un supermercado tiene ordenado en su caja las siguientes monedas; 3 monedas de 10 pesos, 8 monedas de 20 pesos, 5 monedas de 5 pesos. Determina la mediana de las monedas.

Actividad 7.1.3

Instrucciones: Resuelve correctamente cada uno de los problemas y une con una línea la respuesta correcta que se encuentre en la segunda columna.

1. De un grupo de 12 corredores, se obtuvieron los siguientes tiempos en una carrera de 100 m planos. 9.6, 9.7, 9.8, 9.5, 9.6, 9.8, 9.6, 9.9, 9.6, 9.7 Segundos. Determina la moda de tiempo de la carrera.	• **16.3**
2. En el taller de electricidad se realizaron 10 cortes a un cable de 2 m, de las siguientes medidas; 9.8, 10.5, 9.7, 12.3, 9.8, 10.2, 9.7, 12.4, 9.8, 10.5 cm. Encuentra la moda de las longitudes de los cortes de cable.	• **9.6**
3. En una cosecha de tomates, se obtuvieron 12 sacos con los siguientes pesos en kilogramos; 10.8, 11.9, 16.3, 14.2, 12.3, 16.3, 10.8, 14.3, 16.3, 12.3, 11.9, 16.3. Determina la moda en kilogramos de la cosecha.	• **9**
4. En un hotel de la Riviera Maya, se llevó a cabo una actividad que corresponde al tiempo en minutos, que se toman los camareros y camareras en arreglar una habitación, obteniendo los siguientes resultados; 8, 8, 10, 12, 9, 11, 12, 8, 9, 9, 10, 12, 10, 9, 11, 9, 8, 11. Determina la moda de tiempo de los camareros.	• **9.8**

Actividad 7.1.4

Instrucciones:

1. De la gráfica que se presentan, anota correctamente el concepto correspondiente en cada uno de los recuadros.

Estudiantes de la FCA que trabajan
Porcentajes por semestre de estudio*

Semestre que estudian	Porcentaje Hombres	Porcentaje Mujeres
1	20	15
2	22	20
3	25	24
4	33	32
5	52	51
6	65	65
7	70	71
8	87	88
9	96	95

*Fuente: Perez José, "El trabajo en la escuela", Editorial Académica, México, 19XX

- Cuerpo de la tabla
- Título
- Fuente de la información
- Encabezado

Actividad 7.1.5

Instrucciones:

1. Resuelve el siguiente problema en tu libreta de apuntes.

Un estudiante de primer semestre ha obtenido las siguientes calificaciones. Con la información que se presenta realiza una gráfica de barras.

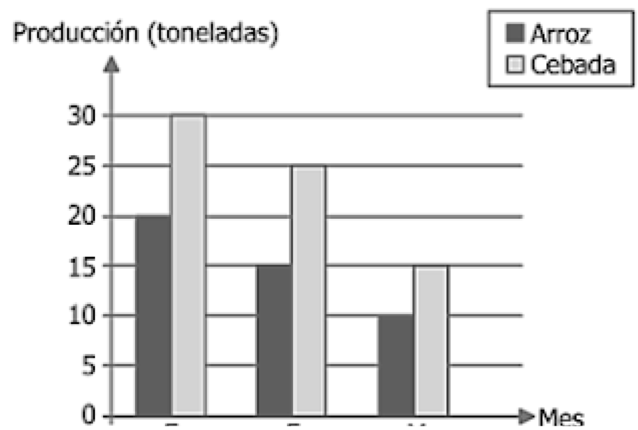
Materia	Calificación
Física 1	9
Matemáticas 1	8
Química 1	8
Taller de lectura y escritura 1	9
Metodología de la investigación	9
Inglés 1	7
Informática 1	6
Orientación Educativa	10
Actividad Paraescolar	10

Actividad 7.1.6

Instrucciones:

1. Resuelve correctamente a cada uno de los problemas en tu libreta de apuntes y subraya la respuesta correcta.

El gráfico muestra la producción (en toneladas) de arroz y cebada, en tres meses del año:



I. ¿En qué porcentaje aproximadamente desciende la producción de arroz entre febrero y marzo?

A) 40% B) 25% C) 33% D) 45%

II. ¿Qué parte de la producción total de arroz representa la producción del mes de febrero?

A) 27,1% B) 25% C) 32% D) 33,3%

Actividad 7.1.7

Instrucciones:

1. Resuelve el siguiente problema en tu libreta de apuntes.

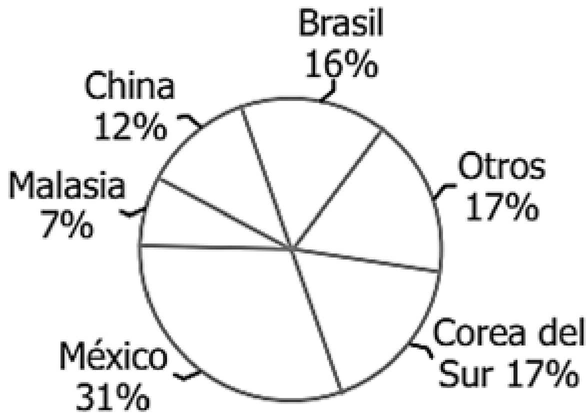
En un supermercado de frutas y verduras se ha realizado un registro sobre la preferencia en compras que tienen los clientes en el transcurso de un mes; el 20% de jitomates, el 25% Naranjas, 10% cebollas, 15% en manzanas y 30% en limones. Con los datos obtenidos realiza un diagrama circular.

Actividad 7.1.8

Instrucciones:

1. Resuelve correctamente a cada uno de los problemas en tu libreta de apuntes y subraya la respuesta correcta.

El gráfico muestra el porcentaje de electrodomésticos importados en el año 2015 de acuerdo con el país de origen:



I. Si en el año 2015 se importaron 750 000 electrodomésticos, ¿cuántos fueron de origen mexicano?

A) 127 500 B) 232 500 C) 120 000 D) 223 500

II. Si la tercera parte de los electrodomésticos importados de Corea del Sur fueron televisores, estos fueron:

A) 42 500 B) 44 400 C) 47 500 D) 38 500

Evaluación

- Esta actividad se evaluará con una rúbrica anexo en el apartado de instrumentos de evaluación (instrumentos 7.1, 7.2 y 7.3), de igual manera revisa el instrumento para la autoevaluación

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Evalúa los posibles resultados de un fenómeno social o natural a partir de la elección de un enfoque determinista o aleatorio
- **Atributo (s): 4.1** Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Conceptos básicos de probabilidad; Ley aditiva, Ley multiplicativa

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

• Conceptos básicos de probabilidad

La probabilidad se finca principalmente en los juegos de azar y se puede considerar como la teoría que muestra los posibles resultados de experimentos. La probabilidad de que ocurra un evento siempre estará entre los valores de 0 y 1 y se puede representar como:

$$\mathbf{0 \leq P(A) \leq l}$$

La probabilidad se puede expresar en fracciones: «¿Qué probabilidad hay de que, al lanzar una moneda al aire, esta caiga con la cara sol hacia arriba?» Aquí la probabilidad es de ½ ya que solo hay dos opciones y se puede solo una; pero puede expresarse como un decimal o sea 0.5 o bien como un porcentaje, en este caso 50%. Se puede hablar también de la probabilidad en contra; así si se tiene una probabilidad de 0.03 o 3%, la probabilidad en contra sería de 97%. Se puede deducir de lo que hemos dicho hasta ahora que:

$$P(A) = \frac{Resultado\ favorable\ en\ A}{Numero\ total\ de\ eventos}$$

Y la probabilidad en contra A es igual al número total de eventos menos el número de eventos favorables, en A. Donde el resultado favorable en A es lo que se espera y el número total de eventos son los favorables en A más los no favorables en A.

Regla aditiva

Algunas veces se desea determinar la probabilidad de uno entre varios eventos diferentes. Por ejemplo, si nosotros tomamos una carta de una baraja española bien barajeada, que tiene 40 cartas (10 de cada palo, enumeradas de 1 (As), 2, 3, 4, 5, 6, 7, Sota, Caballo y Rey y de 4 palos: Oros, Copas, Espadas y Bastos), ¿qué probabilidad hay de que la carta sea un caballo o una copa?

El número total de eventos es 40 (A = 40), hay 4 caballos y 10 copas por lo tanto podría parecer que la probabilidad sería 14/40 pero aquí estaríamos contando el caballo de copas dos veces y obviamente se deben contar las cartas solo una vez, así que nuestra probabilidad real será 13/40. Esto sería:

$$P = \frac{4 + 10 - 1}{40} = \frac{13}{40}$$

Lo que nos lleva a obtener la regla aditiva:

Si *A* y *B* son sucesos, la probabilidad de obtener cualquiera de los dos es igual a probabilidad de *A* más la probabilidad de *B* menos la probabilidad de su ocurrencia conjunta:

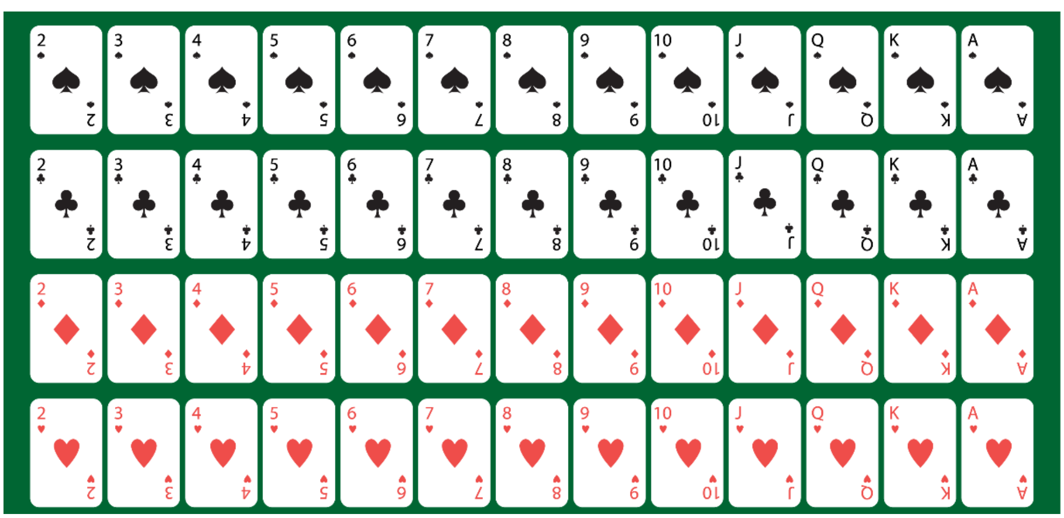
P (A o B) = P(A) + P(B) – P (A y B)

Cuando los sucesos A y B son mutuamente excluyentes: *P (A o B) = P (A) + P (B)*

Baraja Inglesa:
La baraja está dividida en cuatro palos (en inglés: *suit*), dos de color rojo y dos de color negro:

- ♦ → **Rombos** (conocidos como **diamantes**, **oros** o **cocos,** son de color **rojo**).
- ♣ →**Tréboles** (conocidos como **flores** o **bastos,** son de color **negro**).
- ♥ → **Corazones** (conocidos como **copas,** son de color **rojo**).
- ♠ → **Picas** (conocidas como **espadas,** son de color **negro**).

Cada palo está formado por 13 cartas, de las cuales 9 cartas son numerales y 4 literales. Se ordenan de menor a mayor "rango" de la siguiente forma: ***A***,***2***,***3***,***4***,***5***,***6***,***7***,***8***,***9***,***10***,***J***,***Q***,***K***. Las cartas con letras, las figuras, se llaman *jack*, *queen*, *King* y *ace*. En español reciben nombres diversos, que se detallan más adelante.



Ejemplo 1

¿Cuál es la probabilidad de sacar un diamante o un trébol de una baraja de 52 cartas?

Solución: P(A) = P (sacar un diamante) $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

P(B) = P (sacar un trébol) $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

P(A o B) $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5\ o\ 50\%$

Ejemplo 2

¿Cuál es la probabilidad de sacar un corazón o un rey de una baraja de 52 cartas?

Solución: P(A) = P (sacar un corazón) $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

P(B) = P (sacar un rey) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

P(Ay B) = *P* (sacar un corazón y un rey) $= \frac{1}{52}$

Así tenemos que:

P (A o B) = P(A) + P(B) – P (A y B)

P(A o B) $= \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = 0.30\ o\ 30\%$

Actividad 7.2.1

Instrucciones

1. Realiza la lectura previa de los conceptos básicos de la probabilidad (Regla Aditiva) y complementa tu conocimiento, tomando en cuenta la lectura sobre las características de la baraja inglesa de cómo está estructurado sus elementos y los dos ejemplos resueltos para que realices los tres ejercicios propuestos.
2. Transcribe cada ejercicio en tu libreta o en hojas blancas para darle solución escribiendo el procedimiento completo como lo observas en los dos ejemplos propuesto.
3. Al terminar anéxalos en tu cuadernillo para su revisión pertinente.

I. Supongamos que se extrae una carta de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea o un rey o una figura negra?

II. Del ejemplo 1 calcular. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una espada o un trébol?

III. Consideremos un juego el cual debe elegirse una carta de una baraja de 52 cartas. Ganaremos $ 10 si la carta es negra o es un rey. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Regla multiplicativa

Algunas veces es necesario encontrar la probabilidad de que ocurran dos o más sucesos de manera simultánea, por ejemplo, de tu escuela (a partir de la cual generalizaremos a las demás escuelas) queremos seleccionar a quienes tienen preferencias electorales por algún partido político y además que sean mayores de edad. Como se ve. este problema no entraría en los que se pueda aplicar la ley aditiva sino la multiplicativa que dice:

Cuando los sucesos son dependientes: dados dos sucesos A y B, la probabilidad de obtener ambos en común es el producto de la probabilidad de obtener uno de esos sucesos, multiplicada por la probabilidad condicional de la obtención de un suceso dado que el otro ha ocurrido. Así:

$$\mathbf{P\,(A\ y\ B) = P(A) * P\,(B \mid A) = P(B) * P\,(A \mid B)}$$

Donde P (B | A) y P (A | B) representa probabilidades condicionales y P (A | B) representa la probabilidad de B dado que A haya ocurrido.

Cuando los sucesos son independientes, la fórmula anterior se convierte en:

$$\mathbf{P\,(A y\ B) = P\,(A) * P(B) = P\,(B) * P(A)}$$

Ejemplo 1

En una caja hay 20 celulares iguales, pero 5 de ellos están defectuosos. Si se seleccionan 2 celulares al azar y se retiran de la caja, uno después del otro, sin reemplazar el primero, ¿cuál es la probabilidad de que ambos celulares estén defectuosos?

Solución:

Sea P (A). la probabilidad de que 1 celular esté defectuoso y P (B) la probabilidad de que el segundo celular esté defectuoso, entonces tenemos que:

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad y \quad P(B) = \frac{4}{19}$$

ya que si ocurre *P* (A) solo quedarían 4 celulares defectuosos de 19 restantes.

Por lo tanto: $P(A\ y\ B) = \frac{1}{4} * \frac{4}{19} = \frac{1}{19} = 0.52\ o\ 5.2\%$ (Eventos Dependientes)

Ejemplo 2

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados estos sumen 6?[30]

[30] (Pulido, 2020)

Solución:

Ya que cada lado tiene 6 caras, el número de combinaciones posibles es 6 x 6 = 36. Las formas en que la suma daría 6 son las siguientes. 1 y 5, 2 y 4, 3 y 3, 4 y 2, 5 y I = 5 sucesos = P (A)

Probabilidad que salga 1 es 1/6 y que salga 5 es 1/6.

Probabilidad que salga 1 y 5 a la vez es: $P(B) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

por lo tanto:

$P(A\ y\ B) = 5 * \frac{1}{36} = \frac{5}{36} = 0.38\ o\ 38\%$ (Eventos Independientes)

Actividad 7.2.2

Instrucciones

1. Realiza la lectura previa de los conceptos básicos de la probabilidad (Regla Aditiva) y complementa tu conocimiento, tomando en cuenta la lectura sobre las características de la baraja inglesa de cómo está estructurado sus elementos y los dos ejemplos resueltos para que realices los tres ejercicios propuestos.
2. Transcribe cada ejercicio en tu libreta o en hojas blancas para darle solución escribiendo el procedimiento completo como lo observas en los dos ejemplos propuesto.
3. Al terminar anéxalos en tu cuadernillo para su revisión pertinente.

I. Supongamos que se extrae una carta de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea o un rey o una figura negra?

II. Del ejemplo 1 calcular. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una espada o un trébol?

III. Consideremos un juego el cual debe elegirse una carta de una baraja de 52 cartas. Ganaremos $ 10 si la carta es negra o es un rey. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Evaluación

- Estos ejercicios se evaluarán con el instrumento 7.4 Rúbrica anexa en el apartado de correspondiente.

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿Lo que aprendiste lo identificas y lo utilizas en situaciones cotidianas?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

INSTRUMENTOS PARA EVALUACIÓN

Instrumento 1.1. Rúbrica. Reconociendo a los números.

Atributos: 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

Nivel de logro **Criterios**	**EXCELENTE** **10**	**MUY BIEN** **9-8**	**BIEN** **7-6**	**REGULAR** **5**
Recta numérica	La recta numérica está bien trazada y todos los números son colocados en forma correcta.	La recta numérica está bien trazada pero algunos números no son colocados en forma correcta.	La recta numérica está bien trazada y la mayoría de los números no están colocados en forma correcta	La recta numérica no es bien trazada y los números no son colocados de forma correcta
Números al cuadrado	Todos los cuadrados de los números son correctos.	Hay algunos cuadrados de números incorrectos	La mayor parte de los cuadrados de los números son incorrectos.	No logra elevar los números al cuadrado.
Decimales	Todas las fracciones tienen su equivalente decimal correcto	Algunas fracciones no tienen su equivalente decimal correcto	La mayor parte de las fracciones no tienen su equivalente decimal correcto.	No logra calcular el equivalente decimal de una fracción.
Números primos	Todos los números primos proporcionados son correctos.	Hay algunos números proporcionados que no son primos.	La mayor parte de los números proporcionados no son primos.	No logra identificar a los números primos.
Fracciones	Todas las fracciones calculadas son correctas.	Hay algunas fracciones calculadas que son incorrectas	La mayor parte de las fracciones proporcionadas son incorrectas.	No logra calcular las fracciones.

Instrumento 1.2. Lista de cotejo. Todo lo que puedo hacer con los números reales.

Atributos: 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

Nº	INDICADOR	EJECUCIÓN (SI, NO)	PONDERACIÓN (%)	TOTAL	OBSERVACIONES
1	Realiza correctamente los cálculos para el llenado de la tabla y para la comparación de cantidades.		40		
2	Elabora sus conclusiones.		10		
3	Realiza el cálculo correcto de la temperatura.		20		
4	Utiliza el mínimo común múltiplo para resolver el problema y obtiene el resultado correcto		30		
Calificación final:					

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 2.1 Lista de cotejo para evaluar actividad 1 y 2 del bloque dos

Atributo: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

PROFESOR	INSTITUCIÓN
ALUMNO	SESIÓN
SEMESTRE Y GRUPO	FECHA DE APLICACIÓN

	NIVEL LOGRADO			
INDICADOR DESEMPEÑO	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Ejercicios copiados en la libreta	1			
Orden y limpieza	1			
Estableció correctamente las razones	2			
Realizó el despeje correctamente	2			
Resuelve correctamente los problemas de razones y proporciones	2			
Resaltó la respuesta	1			
Entregó a tiempo	1			

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 3.1. Lista de cotejo para solución de ejercicios de la actividad 1 de Lenguaje algebraico.

Atributos: 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones

En la columna puntaje se anota el número de puntos que obtuvo si cumplió con el criterio de evaluación y X si no cumplió, posteriormente se suman y se anexa el resultado en total.

ALUMNO:	**BLOQUE:**	
SEMESTRE Y GRUPO:	**FECHA DE APLICACIÓN:**	
Criterios de evaluación	**Ponderación**	**Puntaje**
De Forma.		
Título de la actividad, bloque, fecha, nombre del alumno, grado y grupo.	1 punto	
Orden y limpieza	1 punto	
De contenido		
Realizó las traducciones completas.	3 puntos	
Las traducciones son correctas.	5 puntos	
Total (de 10 puntos):		

Observaciones:
___
___
___

Instrumento 3.2. Lista de cotejo para solución de ejercicios de la actividad 2 de Expresiones algebraicas.

Atributos: 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones

En la columna puntaje se anota el número de puntos que obtuvo si cumplió con el criterio de evaluación y X si no cumplió, posteriormente se suman y se anexa el resultado en total.

ALUMNO:		**BLOQUE:**
SEMESTRE Y GRUPO:		**FECHA DE APLICACIÓN:**
Criterios de evaluación	**Ponderación**	**Puntaje**
De Forma.		
Título de la actividad, bloque, fecha, nombre del alumno, grado y grupo.	1 punto	
Orden y limpieza	1 punto	
De contenido		
Completó todos los espacios de la tabla	3 puntos	
Completó correctamente las partes de los términos en la tabla.	5 puntos	
Total (de 10 puntos):		

Observaciones:

____

____

____

Instrumento 3.3. Lista de cotejo para solución de ejercicios de la actividad 3 de Leyes de los exponentes.

Atributos: 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones

En la columna puntaje se anota el número de puntos que obtuvo si cumplió con el criterio de evaluación y X si no cumplió, posteriormente se suman y se anexa el resultado en total.

ALUMNO:	**BLOQUE:**	
SEMESTRE Y GRUPO:	**FECHA DE APLICACIÓN:**	
Criterios de evaluación	**Ponderación**	**Puntaje**
De Forma.		
Título de la actividad, bloque, fecha, nombre del alumno, grado y grupo.	1 punto	
Orden y limpieza	1 punto	
De contenido		
Realizó los ejercicios completos.	3 puntos	
Los resultados son correctos.	5 puntos	
Total (de 10 puntos):		

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 3.4. Lista de cotejo para solución de ejercicios de la actividad 4 de operaciones con polinomios.

Atributos: 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones

En la columna puntaje se anota el número de puntos que obtuvo si cumplió con el criterio de evaluación y X si no cumplió, posteriormente se suman y se anexa el resultado en total.

ALUMNO:		**BLOQUE:**
SEMESTRE Y GRUPO:		**FECHA DE APLICACIÓN:**
Criterios de evaluación	**Ponderación**	**Puntaje**
De Forma.		
Título de la actividad, bloque, fecha, nombre del alumno, grado y grupo.	1 punto	
Orden y Limpieza	1 punto	
De contenido		
Escribió los procedimientos completos	4 puntos	
Resolvió correctamente los ejercicios	4 puntos	
Total (de 10 puntos):		

Observaciones:

____

____

____

Instrumento 3.5. Lista de cotejo para solución de ejercicios de la actividad 5 de productos notables.

Atributos: 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones

En la columna puntaje se anota el número de puntos que obtuvo si cumplió con el criterio de evaluación y X si no cumplió, posteriormente se suman y se anexa el resultado en total.

ALUMNO:	**BLOQUE:**	
SEMESTRE Y GRUPO:	**FECHA DE APLICACIÓN:**	
Criterios de evaluación	**Ponderación**	**Puntaje**
De Forma.		
Título de la actividad, bloque, fecha, nombre del alumno, grado y grupo.	1 punto	
Orden y limpieza	1 punto	
De contenido		
Realizó los ejercicios completos	3 puntos	
Las soluciones encontradas son correctas.	5 puntos	
Total (de 10 puntos):		

Observaciones:

____

____

____

Instrumento 3.6. Lista de cotejo para solución de ejercicios de la actividad 6 de factorización.

Atributos: 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones

En la columna puntaje se anota el número de puntos que obtuvo si cumplió con el criterio de evaluación y X si no cumplió, posteriormente se suman y se anexa el resultado en total.

ALUMNO:	**BLOQUE:**	
SEMESTRE Y GRUPO:	**FECHA DE APLICACIÓN:**	
Criterios de evaluación	**Ponderación**	**Puntaje**
De Forma.		
Título de la actividad, bloque, fecha, nombre del alumno, grado y grupo.	1 punto	
Orden y limpieza	1 punto	
De contenido		
Resolvió todos los ejercicios	3 puntos	
Obtuvo las factorizaciones correctas	5 puntos	
Total (de 10 puntos):		

Observaciones:

____
____
____

Instrumento 3.7. Lista de cotejo para solución de ejercicios de la actividad 7 de fracciones algebraicas.

Atributos: 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones

En la columna puntaje se anota el número de puntos que obtuvo si cumplió con el criterio de evaluación y X si no cumplió, posteriormente se suman y se anexa el resultado en total.

ALUMNO:	**BLOQUE:**	
SEMESTRE Y GRUPO:	**FECHA DE APLICACIÓN:**	
Criterios de evaluación	**Ponderación**	**Puntaje**
De Forma.		
Título de la actividad, bloque, fecha, nombre del alumno, grado y grupo.	1 punto	
Orden y limpieza	1 punto	
De contenido		
Realizó los ejercicios completos	3 puntos	
Obtuvo las soluciones correctas a los ejercicios	5 puntos	
Total (de 10 puntos):		

Observaciones:

____

____

____

Instrumento 4.1. Rúbrica de actividad 1 del bloque cuatro

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo Plantel:				
CRITERIO	**10**	**9-8**	**7-6**	**5**
Portada.	Incluye nombre del alumno, fecha y número de evidencia.	Incluye 2 datos solicitados.	Incluye de 1 dato solicitado.	No incluye portada.
Presentación.	Está limpio, tiene orden, se lee y entiende perfectamente y usa colores.	Presenta pequeños detalles en la limpieza, legibilidad, orden y usa colores.	Presenta muchos problemas de falta de limpieza, orden, se lee y se entiende con dificultades.	Trabajo sucio, sin orden y se lee y entiende con bastante dificultad.
Resuelve problemas usando ecuaciones lineales.	Resuelve correctamente problemas usando métodos analíticos para las ecuaciones lineales.	Resuelve problemas usando métodos analíticos para las ecuaciones lineales, aunque comete algunos errores.	Intenta resolver problemas usando métodos analíticos para las ecuaciones lineales, aunque comete muchos errores.	No logra resolver problemas usando métodos analíticos para las ecuaciones lineales.
Portada. **Presentación.** **Resuelve problemas.**		**1.00** **1.00** **8.00**		

Instrumento 4.2. Rúbrica de actividad 2 del bloque cuatro

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo Plantel:				
CRITERIO	**10**	**9-8**	**7-6**	**5**
Portada.	Incluye nombre del alumno, fecha y número de evidencia.	Incluye 2 datos solicitados.	Incluye de 1 dato solicitado.	No incluye portada.
Presentación.	Está limpio, tiene orden, se lee y entiende perfectamente y usa colores.	Presenta pequeños detalles en la limpieza, legibilidad, orden y usa colores.	Presenta muchos problemas de falta de limpieza, orden, se lee y se entiende con dificultades.	Trabajo sucio, sin orden y se lee y entiende con bastante dificultad.
Resuelve problemas usando ecuaciones lineales.	Resuelve correctamente problemas usando métodos analíticos y/o gráficos para las ecuaciones lineales.	Resuelve problemas usando métodos analíticos y/o gráficos para las ecuaciones lineales, aunque comete algunos errores.	Intenta resolver problemas usando métodos analíticos y/o gráficos para las ecuaciones lineales, aunque comete muchos errores.	No logra resolver problemas usando métodos analíticos y/o gráficos para las ecuaciones lineales.
Portada. **Presentación.** **Resuelve problemas.**		**1.00** **1.00** **8.00**		

Instrumento 5.1. Lista de cotejo de la actividad 1 del bloque cinco

Atributos: 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESIÓN:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACIÓN

INSTRUCCIONES: En registro de cumplimiento marca con una palomita en la columna de "SI" solo los indicadores que estés cumpliendo y con una equis los indicadores que no cumpliste solo en la columna de "NO".

No	INDICADORES DE DESEMPEÑO A EVALUAR	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
			SI	NO	
1	La actividad es presentable.	1			
2	Las operaciones realizadas para llegar al resultado se aplican de forma correcta.	2,5			
3	Aplica correctamente las leyes de los signos.	2,5			
4	Respondió correctamente más del 90% de los ejercicios.	2			
5	Reconoce, entiende y pone en práctica el aprendizaje esperado.	2			
CALIFICACIÓN FINAL					

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 5.2. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 del bloque cinco

Atributo: 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESIÓN:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACIÓN

INSTRUCCIONES: En registro de cumplimiento marca con una palomita en la columna de "SI" solo los indicadores que estés cumpliendo y con una equis los indicadores que no cumpliste solo en la columna de "NO".

No	INDICADORES DE DESEMPEÑO A EVALUAR	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
			SI	NO	
1	La actividad es presentable	1			
2	Entregó en tiempo y forma la actividad solicitada por el profesor por el medio que convengan.	1			
3	Sus respuestas son fáciles de interpretar	2,5			
4	Sus deducciones y razonamientos en las preguntas son acertadas.	2,5			
5	Se observa comprensión sobre el tema y/o solicitado en la actividad.	3			
CALIFICACIÓN FINAL					

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 6.1 Lista de cotejo para evaluar ejercicios de búsqueda de patrones, bloque seis

Atributo (s): 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de su objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESIÓN:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACIÓN:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN: LISTA DE COTEJO				
MATEMÁTICAS I				
Criterios de evaluación	Actividades de aprendizaje			
	Puntos	Si	No	Observaciones
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió los ejercicios en su libreta de apuntes	10			
Analiza, reflexiona, responde y encuentra la regla general para la sucesión dada en el problema.	30			
Ordena adecuadamente cada valor en el Triángulo de Pascal	10			
Da tres ejemplos de patrones en su contexto y detalla cada uno.	30			
Calificación obtenida				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 6.2 Lista de cotejo para calificar ejercicios de Sucesiones y series, bloque seis

Atributo (s): 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de su objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESIÓN:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACIÓN:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN: LISTA DE COTEJO				
MATEMÁTICAS I				
Criterios de evaluación	Actividades de aprendizaje			
	Punt os	Si	No	Observaciones
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió los ejercicios en su libreta de apuntes	10			
Analiza, reflexiona y busca el patrón para resolver el Triángulo de Pascal	30			
Subraya las reglas de sucesión que corresponden a los ejercicios I, II y III.	30			
Responde las preguntas solicitadas	10			
Calificación obtenida				

Observaciones:

____

____

____

Instrumento 7.1. Rúbrica secuencia didáctica medidas de centralización, bloque siete

Atributo: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Rúbrica de evaluación	
Nombre del Alumno	
Secuencia didáctica:	Medidas de centralización
Actividad 1.1 Actividad 1.2 Actividad 1.3	Medidas de centralización: media, mediana y moda
Curso:	Matemáticas 1
Fecha:	

CATEGORÍA	**4**	**3**	**2**	**1**	**PUNTAJE**
Orden y Organización	El trabajo es presentado de una manera ordenada, clara y organizada que es fácil de leer.	El trabajo es presentado de una manera ordenada y organizada que es, por lo general, fácil de leer.	El trabajo es presentado en una manera organizada, pero puede ser difícil de leer.	El trabajo se ve descuidado y desorganizado. Es difícil saber qué información está relacionada.	
Conclusión	Todos los problemas fueron resueltos.	Todos menos 1 de los problemas fueron resueltos.	Todos menos 2 de los problemas fueron resueltos.	Varios de los problemas no fueron resueltos.	
Errores Matemáticos	90-100% de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Casi todos (85-89%) los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	La mayor parte (75-85%) de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Más del 75% de los pasos y soluciones tienen errores matemáticos.	
Razonamiento Matemático	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.	
Estrategia/ Procedimientos	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no lo hace consistentemente.	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	

Instrumento 7.1. Autoevaluación secuencia didáctica medidas de centralización, bloque siete

Atributo: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Sobresaliente	Notable	Bien	Suficiente	Insuficiente	
Soy capaz de expresar de forma ordenada y comprensible las medidas de centralización: moda, media y mediana. Soy capaz de llevarlos a la práctica de manera satisfactoria.	Expreso de forma ordenada y comprensible las medidas de centralización: moda, media y mediana trabajadas en la actividad y puedo llevarlos a la práctica.	Me cuesta expresar los conocimientos e ideas trabajadas, moda, media y mediana, de forma ordenada y comprensible y me cuesta llevar a la práctica la teoría.	Tengo muchos problemas para expresar los conceptos e ideas trabajadas, moda, media y mediana, de forma ordenada y comprensible, y no soy capaz de llevarlos a la práctica sin ayuda.	No domino los conceptos e ideas trabajadas, moda, media y mediana. No las expreso con claridad ni orden y no puedo llevarlo a la práctica.	

Instrumento 7.2. Rúbrica secuencia didáctica medidas de centralización, bloque 7

Atributo: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Rúbrica de evaluación	
Nombre del Alumno	
Secuencia didáctica:	Medidas de centralización
Actividad 1.4 Actividad 1.5 Actividad 1.6	**Organización y representación de la información mediante métodos gráficos**
Curso:	Matemáticas 1
Fecha:	

CATEGORÍA	**4**	**3**	**2**	**1**	**Puntos**
Orden y Organización	El trabajo es presentado de una manera ordenada, clara y organizada que es fácil de leer.	El trabajo es presentado de una manera ordenada y organizada que es, por lo general, fácil de leer.	El trabajo es presentado en una manera organizada, pero puede ser difícil de leer.	El trabajo se ve descuidado y desorganizado. Es difícil saber qué información está relacionada.	
Conclusión	Todos los problemas fueron resueltos.	Todos menos 1 de los problemas fueron resueltos.	Todos menos 2 de los problemas fueron resueltos.	Varios de los problemas no fueron resueltos.	
Errores Matemáticos	90-100% de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Casi todos (85-89%) los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	La mayor parte (75-85%) de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Más del 75% de los pasos y soluciones tienen errores matemáticos.	
Razonamiento Matemático	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.	
Estrategia/ Procedimientos	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no lo hace consistentemente.	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	

Instrumento 7.2. Autoevaluación secuencia didáctica medidas de centralización, bloque siete

Atributo: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Sobresaliente	Notable	Bien	Suficiente	Insuficiente	
Soy capaz de expresar de forma ordenada y comprensible la organización y representación de la información Soy capaz de llevarlos a la práctica de manera satisfactoria.	Expreso de forma ordenada y comprensible la organización y representación de la información trabajadas en la actividad y puedo llevarlos a la práctica.	Me cuesta expresar los conocimientos e ideas trabajadas, la organización y representación de la información, de forma ordenada y comprensible y me cuesta llevar a la práctica la teoría.	Tengo muchos problemas para expresar los conceptos e ideas trabajadas, la organización y representación de la información, de forma ordenada y comprensible, y no soy capaz de llevarlos a la práctica sin ayuda.	No domino los conceptos e ideas trabajadas, la organización y representación de la información. No las expreso con claridad ni orden y no puedo llevarlo a la práctica.	

Instrumento 7.3 Rúbrica secuencia didáctica medidas de centralización, bloque 7

Atributo: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Rúbrica de evaluación	
Nombre del Alumno	
Secuencia didáctica:	Medidas de centralización
Actividad 1.7 Actividad 1.8	**Organización y representación de la información mediante métodos gráficos**
Curso:	Matemáticas 1
Fecha:	

CATEGORÍA	**4**	**3**	**2**	**1**	**Puntos**
Orden y Organización	El trabajo es presentado de una manera ordenada, clara y organizada que es fácil de leer.	El trabajo es presentado de una manera ordenada y organizada que es, por lo general, fácil de leer.	El trabajo es presentado en una manera organizada, pero puede ser difícil de leer.	El trabajo se ve descuidado y desorganizado. Es difícil saber qué información está relacionada.	
Conclusión	Todos los problemas fueron resueltos.	Todos menos 1 de los problemas fueron resueltos.	Todos menos 2 de los problemas fueron resueltos.	Varios de los problemas no fueron resueltos.	
Errores Matemáticos	90-100% de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Casi todos (85-89%) los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	La mayor parte (75-85%) de los pasos y soluciones no tienen errores matemáticos.	Más del 75% de los pasos y soluciones tienen errores matemáticos.	
Razonamiento Matemático	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.	
Estrategia/ Procedimiento	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no lo hace consistentemente.	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	

Instrumento 7.3. Autoevaluación secuencia didáctica medidas de centralización, bloque siete

Atributo: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Sobresaliente	Notable	Bien	Suficiente	Insuficiente	
Soy capaz de expresar de forma ordenada y comprensible la organización y representación de la información por métodos gráficos Soy capaz de llevarlos a la práctica de manera satisfactoria.	Expreso de forma ordenada y comprensible la organización y representación de la información por métodos gráficos trabajadas en la actividad y puedo llevarlos a la práctica.	Me cuesta expresar los conocimientos e ideas trabajadas, la organización y representación de la información por métodos gráficos, de forma ordenada y comprensible y me cuesta llevar a la práctica la teoría.	Tengo muchos problemas para expresar los conceptos e ideas trabajadas, la organización y representación de la información por métodos gráficos, de forma ordenada y comprensible, y no soy capaz de llevarlos a la práctica sin ayuda.	No domino los conceptos e ideas trabajadas, la organización y representación de la información por métodos gráficos. No las expreso con claridad ni orden y no puedo llevarlo a la práctica.	

Instrumento 7.4 Rúbrica secuencia didáctica probabilidad del bloque siete

Rúbrica de evaluación	
Nombre del Alumno	
Actividad 2	**Conceptos básicos de probabilidad**
Curso:	Matemáticas 1
Fecha:	

RÚBRICA PARA EVALUAR EJERCICIOS				
ELEMENTOS	**EXCELENTE**	**BUENO**	**REGULAR**	**DEFICIENTE**
EJERCICIO	Presenta la totalidad de ejercicios a resolver.	Entrega más del 80% de los ejercicios a resolver.	Presenta más del 60% de los ejercicios a resolver.	Presenta menos del 50% de los ejercicios a resolver
PROCEDIMIENTO	Refleja un razonamiento detallado y ordenado, utilizando el proceso adecuado, siguiendo los pasos para resolver los ejercicios de manera correcta.	Refleja un razonamiento sin orden, puede hacer los ejercicios, pero no explica la manera en que los resolvió. Cuando los hace utiliza el proceso adecuado, siguiendo los pasos para resolver los ejercicios de manera correcta.	Refleja un razonamiento sin orden, puede hacer los ejercicios, pero no explica la manera en que los resolvió. Utiliza otro proceso obteniendo un resultado razonable	No refleja ningún razonamiento, resuelve los ejercicios de manera mecánica.
RESULTADO	Presenta el resultado obtenido de los ejercicios y es correcto. Puede corroborarlo dándole sentido	Presenta 80% o más resultados correctos, comete algunos errores debido a cálculos erróneos, utiliza el proceso adecuado y sigue los pasos para resolverlo.	Presenta 60 % o más resultados correctos, comete algunos errores debido a cálculos erróneos, y un proceso inadecuado, se salta los pasos para resolverlo.	Presenta 50% o menos resultados correctos, no sigue el procedimiento adecuado
PUNTAJE	**10**	**8**	**6**	**4**

MATERIAL SUGERIDO PARA CONSULTA

Aguilar, M. A., Bravo, V. F. V., & Gallegos, R. H. A. (2015). *Matemáticas simplificadas* (4a. ed.). Distrito Federal: Pearson Educación.

Baldor, A. *Álgebra*, Publicaciones Cultural, México, 1989.

Cancino Morales, A., Morán Hernandez, E., & Sánchez Alavez, J. L. (2020). *Matemáticas I - Guía Pedagógica Extraordinaria para el desarrollo de Aprendizajes Esperados.* Ciudad de México: Secretaria de Educación Pública.

Chao, L., L. (2002). *Introducción a la estadística (2ª ed.).* México: McGraw-Hill.

Cuellar, J. (2014). *Matemáticas I*. México: Mc Graw Hill Education.

Dirección General de Bachillerato. (2017). *Programa de estudios de Matemáticas* I. México: DGB

Durazo Armenta, A., Morales Mercado, E., Rivera Martínez, H., Cárdenas Esquer, L., Conde Hernández, M. E., Rendón Ramos, M. A., & Amavisca Carlton, R. (2016). *Matemáticas 1.* Hermosillo: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

García, N.A., Rodríguez, S.L., & Ponce, J.A. (2018). *Matemáticas I* (1a. ed.). Jalisco, México: Umbral Editorial.

Garrido Méndez, M., Llamas Casoluengo, L. d., & Sánchez Linares, I. (2015). *Matemáticas 1.* Ciudad de México: Secretaria de Educación Pública.

Garza, B. *Aritmética y álgebra*. Colección DGETI. México, 1997.

Hernández, L. (1982). *Elementos de Probabilidad y Estadística*. Fondo de Cultura Estadística

hiru.eus. (26 de Mayo de 2021). *hiru.eus*. Obtenido de https://www.hiru.eus/es/matematicas/progresiones-aritmeticas-y-geometricas

JLF. *Geogebra*. Recuperado el 25 de Mayo de 2021 de https://www.geogebra.org/m/enwbSVbm

Lehmann, C. *Álgebra*. Editorial Limusa. México, 1999.

Mendehall, W. y Scheaffer, R. (2002). *Estadística aplicada (4ª ed.).* México: Thomson International.

Meyer, P. (1994). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas (2ª ed.).* México: Addison-Wesley Iberoamericana.

Moore, D. (1991). *Estadística aplicada básica.* México: Antoni Bosch Editor.

Ortíz, F. *Álgebra.* Publicaciones Cultural. México, 1995.

Pulido Chiunti, A., & Vélez Castillejos, M. Á. (2020). *Matemáticas 1.* Ciudad de México: Nueva Imagen, S.A de C.V.

Quesada, V. y Isidoro, L. (1989). *Curso y Ejercicios de Estadística*. México: Alhambra.

Secretaría de Educación Pública. (2021). *Guía de estudio: Evaluación diagnóstica al Ingreso a la Educación Media Superior.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Superprof. *Superprof*. . Sucesiones y progresiones. Recuperado el 25 de Mayo de 2021 de https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/sucesiones/sucesiones-y-progresiones.html

Ylé Martínez, A., Juárez Duarte, J. A., & Flórez Arco, A. (2011). *Matemáticas I.* Culiacán : Universidad Autónoma de Sinaloa.

BIBLIOGRAFÍA

Aprende Matemáticas: cursos online gratuitos de Matemáticas (21 de mayo 2017). *Álgebra*. Recuperado el 30 de enero de 2021 de https://www.aprendematematicas.org.mx/course/algebra/

Baldor, A. (2009). *Álgebra.* México, D.F: Editorial Patria

Baldor, A. *Álgebra.* Publicaciones Cultural, México, 1989.

Basto, J. R. (2016). *Matemáticas 1*. Cd. de México: Patria.

Cancino Morales, A., Morán Hernandez, E., & Sánchez Alavez, J. L. (2020). *Matemáticas I - Guía Pedagógica Extraordinaria para el desarrollo de Aprendizajes Esperados.* Ciudad de México: Secretaria de Educación Pública.

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo (2011). *Guía didáctica Matemáticas I.* Chetumal, México: COBAQROO

Cuellar, J. (2014). *Matemáticas I*. México: Mc Graw Hill Education.

Dirección General de Bachillerato. (2017). *Programa de estudios de Matemáticas* I. México: DGB

Durazo Armenta, A., Morales Mercado, E., Rivera Martínez, H., Cárdenas Esquer, L., Conde Hernández, M. E., Rendón Ramos, M. A., & Amavisca Carlton, R. (2016). *Matemáticas 1.* Hermosillo: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

García, N.A., Rodríguez, S.L., & Ponce, J.A. (2018). *Matemáticas I* (1a. ed.). Jalisco, México: Umbral Editorial.

Garrido Méndez, M., Llamas Casoluengo, L. d., & Sánchez Linares, I. (2015). *Matemáticas 1.* Ciudad de México: Secretaria de Educación Pública.

Matemovil. (1 de marzo de 2020). *Diagramas de barras, grafico circular.* Recuperado de https://matemovil.com/diagrama-de-barras-grafico-circular-y-poligono-de-frecuencias/

Méndez, M. G. (2015). *Matemáticas I*. México, D.F.: Secretaría de Educación Pública.

Paredes, R. (12 de Agosto de 2012). Obtenido de https://es.slideshare.net/roxanaparedes27/estadstica-bsica-14054870

Pulido Chiunti, A., & Vélez Castillejos, M. Á. (2020). *Matemáticas 1.* Ciudad de México: Nueva Imagen, S.A de C.V.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes en Educación Media Superior 2017*. Gobierno de México.

Secretaría de Educación Pública. (2021). *Guía de estudio: Evaluación diagnóstica al Ingreso a la Educación Media Superior.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Smartick (s.f). *Problemas de proporcionalidad: proporcionalidad directa e inversa*. 18 de mayo de 2021, de https://www.smartick.es/blog/matematicas/recursos-didacticos/problemas-de-proporcionalidad/

Tahan, M. (2000). *El hombre que calculaba.* (1a. ed.). México: Ed. Limusa.

Westreicher, G. (29 de Julio de 2020). Obtenido de Economipedia: https://economipedia.com/definiciones/histograma.html

Wikipedia. (4 de Junio de 2016). Diagrama de barras. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_barras

Ylé Martínez, A., Juárez Duarte, J. A., & Flórez Arco, A. (2011). *Matemáticas I.* Culiacán : Universidad Autónoma de Sinaloa.

Yo soy tu profe (s.f.). *Proporcionalidad inversa| ejercicios resueltos*. 18 de mayo de 2021, de https://yosoytuprofe.20minutos.es/2017/10/16/practica-23-proporcionalidad-inversa/